

Предварительный список вопросов к теоретическому зачету  
по курсу «Основы математической логики и дискретной математики»

1. Пропозициональные формулы, интерпретации (вычисление значений пропозициональных формул), булевы функции, представление булевой функции в ДНФ и КНФ.
2. Тавтологии, противоречия, выполнимые формулы. Сведение вопроса о выполнимости пропозициональной формулы к вопросу о выполнимости формулы в КНФ.
3. Резолюционная система доказательств, корректность и полнота.
4. Алгоритм проверки выполнимости формулы в 2-КНФ с помощью резолюций.
5. Построение резолюционного доказательства по дереву расщепления.
6. Схемы из функциональных элементов. Эквивалентность различных базисов.
7. Трюк Карацубы для построения схемы для умножения чисел размера  $o(n^2)$ .
8. Существование булевой функции, которая не вычисляется схемой размера  $2^n/Cn$ .
9. Формулы исчисления предикатов. Термы, атомарные формулы, свободные и связанные вхождения переменных, интерпретация и оценка, вычисление значения формулы. Выразимость в арифметике: примеры.
10. Кодирование конечных множеств в арифметике. Выразимость предиката "быть степенью 6".
11. Доказательство невыразимости предикатов с помощью автоморфизмов.
12. Конечные множества, число подмножеств данного множества, число размещений, число сочетаний (биномиальные коэффициенты), элементарные формулы с биномиальными коэффициентами, бином Ньютона, треугольник Паскаля.
13. Характеристическая функция множества, вычисление характеристической функции для пересечения, дополнения, объединения. Вывод формулы включений-исключений.
14. Пример использования формулы включения-исключения: подсчет числа счастливых билетиков.
15. Равномощные множества, равномощность двух отрезков, равномощность множества последовательностей из нулей и единиц и множества натуральных чисел. Счетные множества, свойства счетных множеств.
16. Счетность множеств  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{N}^k$ , множества конечных последовательностей, алгебраических чисел. Объединение бесконечного и счетного множества. Равномощность  $[0, 1]$  и множества последовательностей из нуля и единицы. Равномощность квадрата и отрезка.
17. Теорема Кантора-Бернштейна и примеры применения.
18. Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел. Обобщенная теорема Кантора о неравномощности множества и множества его подмножеств. Существование неалгебраических чисел, существование подмножества натуральных чисел, характеристическая функция которого не вычисляется компьютерной программой.
19. Неориентированные и ориентированные графы, пути, циклы, связность, компоненты связности, сильная связность, компоненты сильной связности. Деревья и их свойства. Оценка на число ребер в связном графе.
20. Теорема Келли о подсчете числа деревьев. Доказательство с помощью кода Прюффера.
21. Эйлеров путь и цикл. Раскраски графов, критерий двудольности графа.

- 22.** Конечное вероятностное пространство, пространство элементарных событий, события. Свойства вероятности. Пример о галстуках.
- 23.** Теорема Эрдеша-Ко-Радо.
- 24.** Случайные величины. Математическое ожидание и его линейность. Турнир с большим числом гамильтоновых путей.
- 25.** Набор выполняющий хотя бы  $\frac{7}{8}$  дизъюнктов формулы в 3-КНФ. Неравенство Маркова. Вероятностный алгоритм, который находит такой набор.
- 26.** Независимые события, независимые случайные величины и их свойства. Распределение Бернулли. Закон больших чисел для распределения Бернулли.
- 27.** Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Дисперсия. Дисперсия суммы попарно независимых случайных величин.
- 28.** Неравенство Чебышева. Закон больших чисел для попарно независимых случайных величин.
- 29.** Условные вероятности, формула Байеса, формула полной вероятности.
- 30.** Лемма Фаркаша.
- 31.** Задача линейного программирования. Двойственные задачи линейного программирования и их свойства.
- 32.** Поток в графе. Задача о максимальном потоке и ее двойственная задача. Вывод теоремы Форда-Фолкерсона о том, что максимальный поток равен разрезу минимальной пропускной способности.
- 33.** Максимальный поток в графе с целочисленными пропускными способностями.
- 34.** Паросочетания и покрывающие множества. Теорема Кенига. Лемма Холла.
- 35<sup>?</sup>.** Частично упорядоченные множества, цепи и антицепи. Теорема Дилвортса.
- 36<sup>?</sup>.** Реберная теорема Менгера.
- 37<sup>?</sup>.** Игра с угадыванием числа и одной ошибкой. Коды, исправляющие ошибки. Код Хемминга. Нижняя оценка на удлинение.
- 38<sup>?</sup>.** Числа Рамсея  $R(m, n)$ , верхняя оценка. Обобщение чисел Рамсея на гиперграфы. Теорема Рамсея.
- 39<sup>?</sup>.** Нижняя оценка на  $R(k, k)$ . Бесконечный вариант теоремы Рамсея.
- 40<sup>?</sup>.** Примеры использования теоремы Рамсея: теорема Эрдеша-Секереша о выпуклом  $n$ -угольнике, раскраска натуральных чисел.