Линейное программирование

Пример:

A, B – два товара

Спрос на A и B:

A покупают не более 200 шт/день

B — // — 300 шт/день

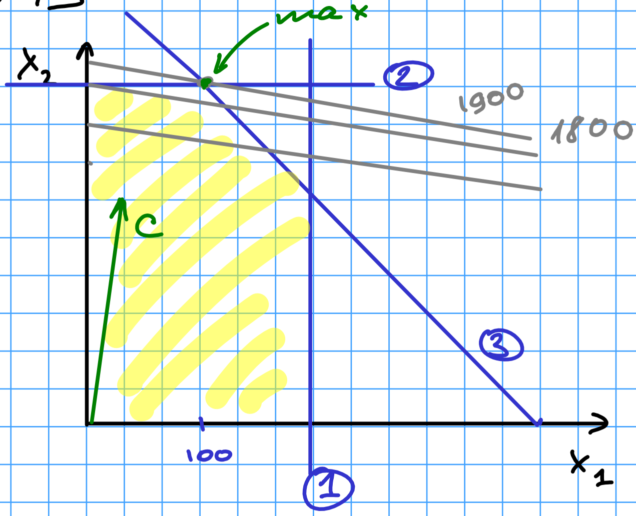
Мы не можем производить более 400 шт/день

Товар B стоит в 6 раз больше A (приносит в 6 раз больше прибыли).

Сколько нужно выпускать A и B, чтобы максимизировать прибыль (план производства)

$x_1 = \# A \qquad x_2 = \# B$

а) $\begin{cases} x_1 \le 200 & (1) \\ x_2 \le 300 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 400 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$



б) Прибыль:

$x_1 + 6 \cdot x_2 \longrightarrow \max$

$x_1 + 6x_2 = C$

≡ Задача линейного прог-ния

Задача оптимизации:

а) линейные ограничения

б) линейная целевая функция

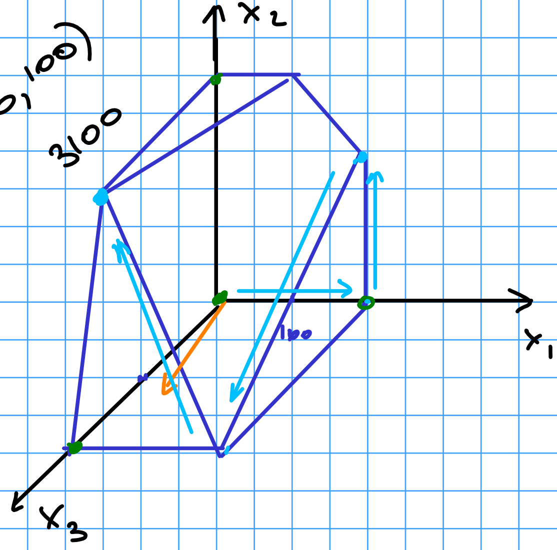
Добавим товар C: $\quad x_3 = \# C$

$x_2 + 3x_3 \le 600$

Стоимость C в 13 раз больше A

$$\begin{cases} x_1 \le 200 \\ x_2 \le 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 400 \\ x_2 + 3x_3 \le 600 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$x_1 + 6x_2 + 13x_3 \to max$$

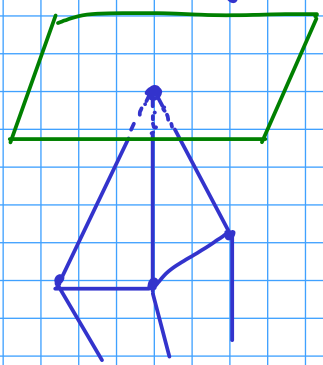


Наблюдение 1:

ОВР – "многогранник" получающийся как пересечение полупространств => выпуклый.

(политоп, полиэдр)

Наблюдение 2:



Оптимум достигается в одной из вершин полиэдра (если оптимум $\exists$)

Идея „Симплекс метода"

```
v – текущая вершина
for u ∈ соседи(v):
    if f(u) > f(v):
        перейти в u
вернуть v
```

Различные формы задачи ЛП

1. Максимизация и минимизация

$$f(x) \to max \iff -f(x) \to min$$

2. Ограничения

а) неравенства $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b$

б) равенства $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$

а) $\to$ б) $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + s = b$

$s \geq 0$

б) $\to$ а)

$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \geq b$

$-a_1 x_1 - \ldots - a_n x_n \geq -b$

3. Ограничения на переменные

а) $x_i \geq 0$

б) $x_i - \forall$

а) $\to$ б) добавить $\underline{-x_i \leq 0}$

б) $\to$ а) $x_i = x_i'' - x_i'$

$x_i', x'' \geq 0$

Матричная запись

$A\bar{x} \leq \bar{b}$

В нашем примере $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$ $\bar{b} = \begin{vmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \\ 600 \end{vmatrix}$

Целевая функция:

$\bar{c}^T \bar{x} \to \max$ $c = \begin{vmatrix} 1 \\ 6 \\ 13 \end{vmatrix}$

ЗЛП

$$\boxed{\begin{array}{l} A\bar{x} \leq b \\ c^T \bar{x} \to \max \\ x_i \geq 0 \end{array}}$$

Двойственность

② + ③ + 4 · ④

$$x_1 + 6x_2 + 13x_3 \le 3100$$ ← верхняя оценка

$x_0 = (0, 300, 100) \in$ ОВР $\qquad c^T \cdot x_0 = 3100$

↗ нижняя оценка

$\Rightarrow$ x_0 — точка оптимума

Как найти такие коэффициенты?

$$y_1 ① + y_2 ② + y_3 \cdot ③ + y_4 \cdot ④ =$$
$$= y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 + y_3 \cdot x_1 + y_3 \cdot x_2 + y_3 \cdot x_3$$
$$+ y_4 \cdot x_2 + y_4 \cdot 3 \cdot x_3 \le$$
$$\le y_1 \cdot 200 + y_2 \cdot 300 + y_3 \cdot 400 + y_4 \cdot 600$$

$$\underline{c^T x} \le x_1 \cdot \overbrace{(y_1 + y_3)}^{1} + x_2 \overbrace{(y_2 + y_3 + y_4)}^{6} + x_3 \overbrace{(y_3 + 3y_4)}^{13} \le$$
$$y_1 \cdot 200 + y_2 \cdot 300 + y_3 \cdot 400 + y_4 \cdot 600 \qquad (*)$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 \ge 1 \\ y_2 + y_3 + y_4 \ge 6 \\ y_3 + 3y_4 \ge 13 \end{cases} \qquad 200y_1 + 300y_2 + 400y_3 + 600y_4 \to \min$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

Двойственная задача

Утв: $\forall$ решение прямой задачи $\le$
$\forall$ решение двойственной задачи

Th. О двойственности

1. Двойственная задача имеет опт. решение
$\Longleftrightarrow$ Прямая задача имеет опт. решение

2. Решение прямой задачи = Решению двойственной задачи

Двойственная задача в общем случае

$$
\begin{array}{lcl}
Ax \le b & & A^T \cdot y \ge c \\
x_i \ge 0 & \longleftrightarrow & y_i \ge 0 \\
c^T x \to \max & & b^T y \to \min \\
A' x = b' & & A'^T y = c'
\end{array}
$$

Замечание 1:

Симплекс метод может работать экспоненциальное время

Всего вершин C_m^n ← # перем ← # огранич.

Замечание 2:

∃ полиномиальный алгоритм для ЛП

Замечание 3:

Задача целочисленного линейного программирования — сложная