

Занятие 2

1. Определить производящую функцию $f(z)$ для чисел Фибоначчи F_n . Получить с ее помощью явные выражения для этих чисел.
2. Числами Люка (Lucas numbers) называются числа L_n , удовлетворяющие следующему рекуррентному соотношению:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n \geq 0; \quad L_0 = 2, \quad L_1 = 1.$$

Построить для них производящую функцию и найти явное выражение для L_n .

3. Обобщением чисел Фибоначчи F_n и чисел Люка L_n являются так называемые последовательности Люка $U_n(p, q)$ и $V_n(p, q)$, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$U_{n+2} = pU_{n+1} - qU_n, \quad n \geq 0; \quad V_{n+2} = pV_{n+1} - qV_n, \quad n \geq 0;$$

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1; \quad V_0 = 2, \quad V_1 = p.$$

Построить производящие функции для этих чисел.

4. Решить с помощью обыкновенных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами:

$$a_{n+1} = a_n + 2^n, \quad a_0 = 0;$$

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \quad a_0 = a_1 = 1;$$

$$a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = 0.$$

5. Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$ описывает количество битовых строк длины n , в которых между каждой парой единиц расстояние больше или равно трем. Составить рекуррентное соотношение для этой последовательности и найти для неё обыкновенную производящую функцию.
6. Составить рекуррентное соотношение для количества a_n слов длины n над алфавитом $\{0, 1, 2\}$, не содержащих двух идущих подряд нулей. Решить это рекуррентное соотношение с помощью обыкновенных производящих функций.
7. Решите с помощью экспоненциальных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения:

$$a_{n+1} = 2(n+1)a_n + (n+1)!, \quad a_0 = 0,$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n, \quad a_0 = a_1 = 1,$$

$$a_n = na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2}, \quad a_0 = a_1 = 1.$$