Паросочетания в графах

Практика

10 ноября 2017 г.

1. (0.5 балла). Выразить количество $\alpha'(T)$ ребер в максимальном паросочетании для дерева T через количество его вершин n и количество k элементов в максимальном вершинно независимом множестве.

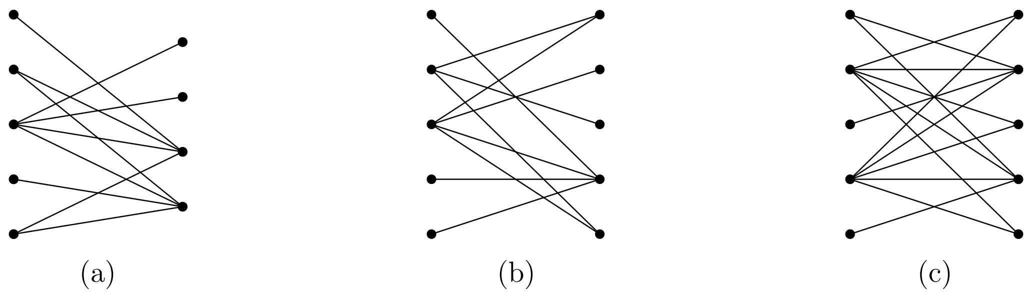

Рис. 1

2. (1 балл). Найти максимальные паросочетания в приведенных на рис.1 графах. Доказать, что данные паросочетания максимальны.

3. (0.5 балла). Найти количество X-насыщенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,m}$ с долями X и Y, $|X| = n$, $|Y| = m$, $n \leqslant m$.

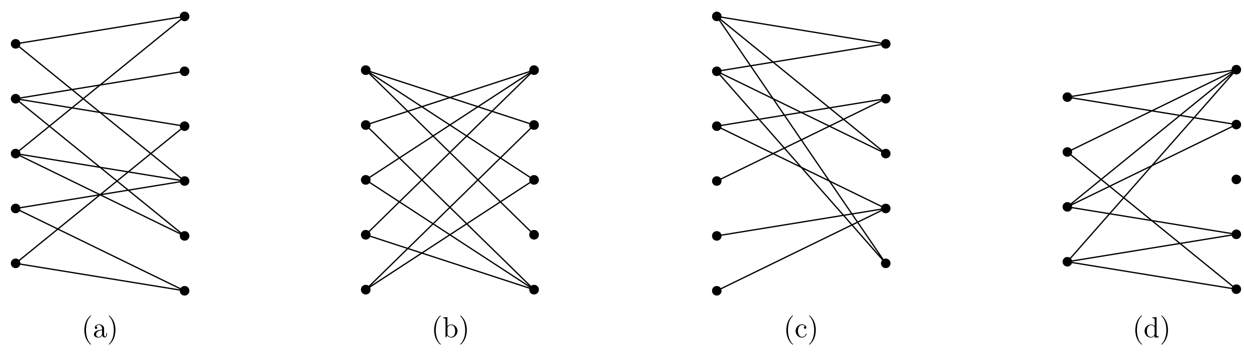

Рис. 2

4. (1 балл). Какие из графов, изображенных на рис.2, имеют X-насыщенное паросочетание?

5. (1.5 балла). Используя свойство слабой оптимальности, доказать, что в изображенном на рис.3 графе G совершенное паросочетание отсутствует.

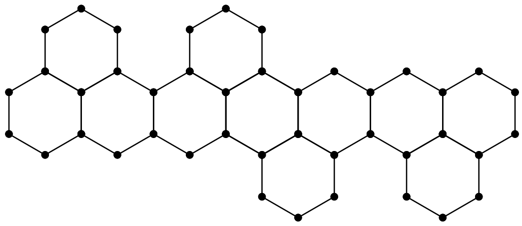

Рис. 3

6. (1 балл). Доказать, что в непустом k-регулярном двудольном графе всегда существует совершенное паросочетание.

7. (1.5 балла). Доказать, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subseteq V(G)$ выполняется неравенство $|S| \leqslant |N(S)|$. Предъявить бесконечное семейство графов, для которых данное свойство выполняется, а совершенное паросочетание при этом отсутствует.

8. (1.5 балла). Доказать, что если $|N(S)| > |S|$ для любого $\varnothing \neq S \subset X$ в двудольном графе $G[X, Y]$, то любое ребро принадлежит хотя бы одному X-насыщенному паросочетанию M.

9. (2 балла). Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание. Доказать, что количество рёбер в $G[X, Y]$, которые не принадлежат ни одному X-насыщенному паросочетанию, не превосходит $\binom{|X|}{2}$. Показать, что эта оценка достигается при любом значении $|X|$.

10. (1.5 балла). Имеется колода из $n \cdot m$ карт, по одной карте для каждого значения масти из $[m]$ и для каждого значения достоинства из $[n]$. Мы раскладываем эти карты в m рядов, каждый из которых содержит ровно n карт. Доказать, что при любой раскладке этих карт можно всегда найти m карт разных мастей, никакие две из которых не лежат в одном и том же столбце.

11. (1.5 балла). Предположим, что размер максимального паросочетания в простом двудольном графе G меньше заданного числа k. Известно также, что в таком графе отсутствует звезда, построенная на l ребрах. Получить верхнюю оценку на количество $|E(G)|$ ребер в этом графе через числа k и l.

12. (1 балл). Доказать теорему Холла, используя вершинную теорему Менгера.

13. (1.5 балла). Доказать теорему Холла, используя теорему Кёнига-Эгервари.