28 сентября 2017

Количество баллов на зачет: *7.5*

1. *(0.5 балла)* Невозрастающая последовательность неотрицательных чисел

$$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \ldots, d_n) : \qquad d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n \ge 0$$

называется *графовой,* если она является последовательностью степеней вершин некоторого *простого* графа G. Показать, что последовательности чисел $(1,1,0)$ и $(2,2,1,1)$ являются графовыми, предъявив для каждой из них соответствующие им простые графы.

2. *(1 балл)* Какие из представленных ниже числовых последовательностей являются графовыми?

(1)	5 2 2 1
(2)	2 2 1 1
(3)	1
(4)	2
(5)	1 1
(6)	6 5 4 3

3. *(2 балла)* Рассмотрим последовательность $\mathbf{d_1} := (3,3,3,3,3,2,2,1)$. Удалим в ней число 3, стоящее на первой позиции, а от следущих трех чисел отнимем по единице. В результате получим последовательность $\mathbf{d_2} := (2,2,2,3,2,2,1)$, которая после переупорядочивания по невозрастанию примет вид $(3,2,2,2,2,2,1)$. В общем случае соответствующая пара последовательностей будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathbf{d_1} & := & (s, & d_1, & d_2, & \ldots, & d_s, & d_{s+1}, & \ldots, & d_n), \\
\mathbf{d_2} & := & & (d_1-1, & d_2-1, & \ldots, & d_s-1, & d_{s+1}, & \ldots, & d_n).
\end{array}$$

Доказать, что последовательность $\mathbf{d_1}$ является графовой тогда и только тогда, когда таковой является и последовательность $\mathbf{d_2}$. Сформулировать на основании данного утверждения алгоритм проверки на графовость для невозрастающей числовой последовательности.

4. *(1.5 балла)* Любой элемент $a_{i,j}$ матрицы M_a смежности графа G можно трактовать как количество путей длины 1 в графе G из вершины i в вершину j. Чему равны с этой точки зрения элементы матрицы M_a^2? Можно ли обобщить данный результат на случай произвольной степени $k > 1$ матрицы M_a?

5. *(1 балл)* Доказать, что для произвольного турнира T справедливо равенство

$$\sum_{x \in V(T)} \operatorname{outdeg}(x)^2 = \sum_{x \in V(T)} \operatorname{indeg}(x)^2.$$

6. *(1.5 балла)* Орграф D называется сбалансированным, если для любой вершины $x \in V(D)$ выполняется неравенство

$$|\operatorname{outdeg}(x) - \operatorname{indeg}(x)| \le 1.$$

Доказать, что из любого неориентированного графа G можно получить сбалансированный орграф D.

7. *(1 балл)* Пусть в графе G ровно две вершины имеют нечетную степень. Доказать, что эти вершины являются связанными.

8. *(1.5 балл)* Доказать, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.

9. *(1.5 балла)* Пусть G есть граф, вершины которого помечены битовыми строками длины $k \ge 1$. Вершины x и y в таком графе являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им битовые строки отличаются ровно в двух позициях. Определить количество связных компонент в таком графе.

10. *(1 балл)* Доказать, что любой маршрут, соединяющий вершины x и y, содержит простой путь, соединяющий те же самые вершины.

11. *(1 балл)* Доказать, что простой граф G, минимальная степень $\delta(G)$ которого больше или равна $n/2$, является связным. Показать, что эта оценка точная, предъявив несвязный граф с $\delta(G) = n/2 - 1$.