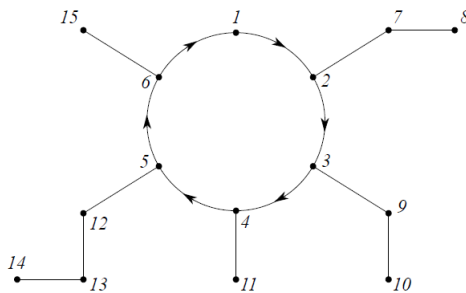


Занятие 6

1. С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений числа $2n + m$ на ровно $n + m$ слагаемых одинаково при любом $m \geq 0$. Сосчитать это количество разбиений.
2. С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений четного числа n на четные слагаемые равно количеству разбиений, в котором любое из чисел (т.е. частей разбиений) входит четное число раз.
3. Докажите, что $p(1) + p(2) + \dots + p(n) < p(2n)$ при $n \geq 1$.
4. Выразите количество разбиений, в которых две наибольших части равны между собой, через числа $p(n)$ и $p(n - 1)$.
5. Несложно убедиться, что $p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$, где $\lfloor k \rfloor$ — ближайшее целое к числу k , меньшее или равное k . Докажите этот результат с помощью производящих функций.
6. В комнате находятся n детей. Эти дети разбиваются на группы. В каждой группе одного ребенка ставят в центр круга, а вокруг него из оставшихся в группе детей образуют хоровод. При этом хоровод может состоять как из нескольких детей, так и из одного ребенка, соединившего руки. Записать экспоненциальную производящую функцию $H(z)$, описывающую количество способов совершить эти комбинаторные действия.
7. Подсчитать количество способов разбить n -элементное множество на блоки, циклически упорядочить каждый блок, а затем один из блоков пометить красным цветом.
8. На рисунке показана дискретная структура, состоящая из цикла длины k (на рисунке $k = 6$), к любой вершине которого может быть подсоединено не более одной линейной цепочки произвольной длины. С использованием композиции производящих функций подсчитайте количество c_n таких структур, построенных на n вершинах. Дайте комбинаторную интерпретацию для найденных чисел c_n .



9. Пусть $A(z)$ есть экспоненциальная производящая функция, описывающая количество корневых деревьев, $S(z)$ — экспоненциальная производящая функция, соответствующая перестановкам множества $[n]$, а $E(z)$ — экспоненциальная производящая функция, коэффициенты которой подсчитывают количество всех отображений множества $[n]$ в себя. Докажите, что эти производящие функции связаны соотношением

$$E(z) = S(A(z)),$$

дав комбинаторную интерпретацию данного равенства.

10. Используя комбинаторный смысл экспоненциальной формулы, подсчитайте количество эйлеровых графов.