

14 сентября 2017

1. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих ровно одну цифру 7? Хотя бы одну цифру 7?
2. Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?
3. Найти сумму четырехзначных чисел, которые можно получить при всевозможных перестановках цифр
а) 1; 2; 3; 4; б) 1; 2; 2; 5.
4. Квадрат разделён на 16 одинаковых квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты в белый, чёрный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?
5. Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений 4, 5, 6, 7?
6. Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?
7. Рассмотрим все пятизначные положительные числа, в которых на третьей позиции стоит девятка. Сколько таких чисел делится на три? А если в пятизначных числах присутствует хотя бы одна девятка, и позиции, на которых она присутствует, нам не важны?
8. Доказать комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

9. Доказать, используя комбинаторные рассуждения, что для всех целых $n \geq m \geq k \geq 0$ справедливо равенство

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\sum_{k=1}^m \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}$$

10. Доказать комбинаторно следующее тождество:

$$\binom{\binom{n+1}{k}}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{\binom{n}{k-i}}{k-i}$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^k \binom{n+k-i-1}{n}$$

11. Подсчитать количество разбиений числа k при ограничениях

$$a_i \geq s_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad s_1 + s_2 + \dots + s_n =: s \leq k.$$