Задание 14 (на 14.12).

$\boxed{\textbf{ML 69.}}$ Приведите пример конечно аксиоматизируемой, но неразрешимой теории. Указание: используйте неразрешимость ассоциативного исчисления.

$\boxed{\textbf{ML 70.}}$ Рассмотрим множество невозрастающих последовательностей натуральных чисел, в которых все члены, начиная с некоторого, равны нулю. Введем в нем порядок: сначала сравниваем первые члены, при равенстве вторые члены и т.д. Покажите, что так получится вполне упорядоченное множество.

$\boxed{\textbf{ML 71.}}$ Рассмотрим множество всех многочленов от одной переменной x, коэффициенты которого натуральные числа. Введем такой порядок многочлен $P(x)$ больше многочлена $Q(x)$, если для всех достаточно больших x выполняется $P(x) > Q(x)$. Покажите, что так получится вполне упорядоченное множество.

$\boxed{\textbf{ML 51.}}$ Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N}+\mathbb{Z}, =, <)$. А будут ли эти интерпретации изоморфны?

$\boxed{\textbf{ML 53.}}$

а) Покажите, что естественные интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ для всех алгебраически замкнутых полей характеристики 0 являются элементарно эквивалентными.

б) Для двух алгебраически замкнутых полей k_1 и k_2 характеристики 0 выполняется, что k_1 является надполем поля k_2. Покажите, что естественная интерпретация $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_1 является элементарным расширением естественной интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_2.

в) Докажите теорему Гильберта о нулях: всякая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле характеристики ноль, имеющее решение в расширении поля, имеет решение и в самом поле.

г) Докажите переформулировку теоремы Гильберта о нулях: если система полиномиальных уравнений $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ не имеет решения в некотором алгебраически замкнутом поле характеристики 0, то найдутся такие многочлены $Q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Q_k(x_1, \ldots, x_n)$, что $\sum\limits_i Q_i P_1 = 1$.

$\boxed{\textbf{ML 58.}}$ Заменим 11-ую аксиому $A \vee \neg A$ на $\neg\neg A \to A$. Покажите, что множество выводимых формул не изменится.

$\boxed{\textbf{ML 59.}}$ Пусть сигнатура содержит только одноместные предикатные символы. Покажите, что:

а) всякая выполнимая формула, содержащая n предикатных символов, выполнима и в интерпретации, в носителе которой не более 2^n элементов;

б) существует алгоритм, проверяющий выполнимость таких формул.

$\boxed{\textbf{ML 66.}}$ В алгебре вам доказывали, что если K — некоторое поле, а многочлен $f \in K[x]$ неприводим, то существует K' надполе поля K, в котором многочлен f имеет корень (в качестве поля K' можно взять $K[x]/{<}f{>}$, это кольцо является полем как фактор-кольцо по максимальному идеалу). С помощью теоремы о компактности покажите, что для всякого поля K существует его надполе K' такое, что каждый неконстантный многочлен с коэффициентами из K имеет корень в K'.