Реберная раскраска графов

Практика

15 декабря 2017 г.

1. (0.5 балла). Определить реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для полного двудольного графа $K_{m,n}$.
2. (0.5 балла). Подсчитать количество ребер в реберном графе $L(G)$ графа G.

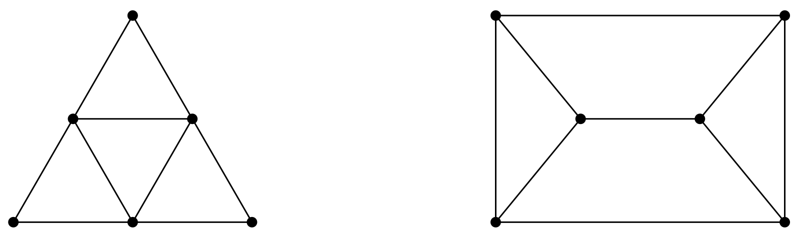

Рис. 1

3. (1 балл). Подсчитать реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для графов, изображенных на рис.1.
4. (1 балл). Подсчитать реберное хроматическое число $\chi'(Q_n)$ для гиперкуба Q_n, предъявив способ оптимальной окраски его ребер.

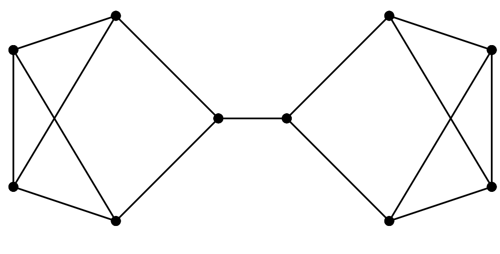

Рис. 2

5. (1 балл). Подсчитать реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для 3-регулярного графа G, показанного на рис.2.
6. (1.5 балла). Доказать, что реберное хроматическое число графа Петерсена равно четырем. Заметим, что граф Петерсена является двухсвязным 3-регулярным графом. Любой такой граф с $\chi'(G) = 4$ называется снарком (snark). Такие графы обладают довольно интересными свойствами, связанными как с раскраской графов, так и с другими характеристиками графов.

7. (1.5 балла). Доказать, что для любого простого двудольного графа $G[X, Y]$ найдется $\Delta(G)$-регулярный простой двудольный граф, содержащий $G[X, Y]$.

8. (1 балл). С помощью предыдущего упражнения доказать, что реберное хроматическое число произвольного простого двудольного графа $G[X, Y]$ равняется $\Delta(G)$.

9. (2.5 балла). Декартовым произведением $G \,\square\, H$ двух графов G и H называется граф, множество вершин которого представляет собой декартово произведение $V(G) \times V(H)$. При этом ребра между вершинами (x, y) и (x', y') в графе $G \,\square\, H$ проводятся согласно следующему правилу: если $x = x'$, а вершины y и y' смежны в H, или если $y = y'$, а вершины x и x' смежны в G. Иными словами, в графе $G \,\square\, H$ любая вершина $x \in G$ заменяется копией графа H, и наоборот, любая вершина $y \in H$ заменяется на некоторую копию графа G. Так, например, граф $P_n \,\square\, K_2$ представляет собой граф “лестница”, граф $K_2 \,\square\, K_2 = C_4$, граф $C_4 \,\square\, K_2 = Q_3$, а декартово произведение n экземпляров графа K_2 представляет собой n-мерный куб Q_n.

   (a) Сосчитать реберное хроматическое число графа $C_n \,\square\, K_2$.

   (b) Используя теорему Визинга, доказать, что $\chi'(G \,\square\, K_2) = \Delta(G \,\square\, K_2)$.

   (c) Пусть G и H представляют собой нетривиальные простые графы, для одного из которых справедливо равенство $\chi'(H) = \Delta(H)$. Используя теорему Визинга, доказать, что в этом случае $\chi'(G \,\square\, H) = \Delta(G \,\square\, H)$.

10. (2.5 балла). Подсчитать количество правильных реберных раскрасок графа, полученного из $K_{3,3}$ заменой любого ребра на мультиребро, состоящее из двух ребер.