

Задание 11 (на 27.04).

СС 56.

- а) Постройте граф со следующими выделенными вершинами: T, t_1, t_2, r , со следующим свойством: в любой правильной раскраске графа в три цвета вершина r покрашена в тот же цвет, что и T , тогда и только тогда, когда хотя бы одна из вершин t_1, t_2 покрашена в тот же цвет, что и T .
- б) Постройте граф со следующими выделенными вершинами: T, t_1, t_2, t_3, r , со следующим свойством: в любой правильной раскраске графа в три цвета вершина r покрашена в тот же цвет, что и T , тогда и только тогда, когда хотя бы одна из вершин t_1, t_2, t_3 покрашена в тот же цвет, что и T .
- в) (подсказка: создайте в графе треугольник с вершинами: $True, False, Base$) Докажите, что язык графов, которые можно раскрасить в три цвета, **NP**-полон.

СС 57. Покажите, что $\mathbf{AM} = \mathbf{AM}_1$

СС 58. Докажите, что:

- а) $\mathbf{P} = \mathbf{PCP}(0, \log(n))$;
- б) $\mathbf{NP} = \mathbf{PCP}(0, \text{poly}(n))$.

СС 59. Покажите, что если $\mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{P/poly}$, то $\mathbf{PSPACE} = \mathbf{MA}$ (подсказка: используйте $\mathbf{IP} = \mathbf{PSPACE}$).

СС 26. (подсказка: $\mathbf{NEXP}^{\mathbf{NP}} \text{ vs. } \mathbf{NEXP}$) Докажите, что если $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, то существует язык из **EXP**, схемная сложность которого не меньше $\frac{2^n}{10n}$.

СС 44. Покажите, что:

- а) если $\mathbf{VPTIME}[f(n)] = \mathbf{VPTIME}[g(n)]$, то $\mathbf{VPTIME}[f(h(n))] = \mathbf{VPTIME}[g(h(n))]$, где f, g, h — конструктивные по времени, $f(n), g(n) \geq \log n$, $h(n) \geq n$ — возрастающая функция;
- б) $\mathbf{DTime}[f(n)] \subseteq \mathbf{VPTIME}[f(n)] \subseteq \mathbf{DTime}[2^{O(f(n))}]$;
- в) $\mathbf{BPP} \subseteq \mathbf{VPTIME}[n^{\log n}] \subsetneq \mathbf{VPTIME}[2^n]$.

СС 45. Определим язык $\mathbf{QNR} = \{(y, m) \mid y \text{ не является квадратичным вычетом по модулю } m\}$, докажите, что $\mathbf{QNR} \in \mathbf{IP}$.

СС 46. \mathbf{VPL}_H — это класс языков, для которых существует вероятностная машина Тьюринга M , которая использует логарифмическую память, останавливается с вероятностью 1, и для всех x выполняется, что $\text{Pr}[M(x) = L(x)] \geq \frac{2}{3}$. Покажите, что $\mathbf{VPL}_H \subseteq \mathbf{P}$.

СС 49. Покажите, что:

- в) если граф представляет собой шахматную доску с выбитыми клетками (вершины — клетки, ребра соединяют соседние клетки), то существует полиномиальный алгоритм, который считает число полных паросочетаний (подсказка: иногда вес ребра удобно взять комплексным).

СС 56. Докажите, что язык булевых формул с ровно одним выполняющим набором (**USAT**):

- а) **coNP**-трудным;
- б) лежит в $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$.

СС 57. Докажите, что:

- а) язык простых чисел лежит в классе **UP**;

б) если $\text{USAT} \in \text{UP}$, то $\text{NP} = \text{coNP}$.

СС 58. Покажите, что существует такой оракул A и язык $L \in \text{NP}^A$, что L не сводится по Тьюрингу к 3SAT , даже если сведение может использовать оракул A .