DL 7.1. Вычислите суммы:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$;

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k^m \cdot \binom{n}{k}$, где $m < n$.

DL 7.2. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

DL 7.3.

a) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ шагами $(1, 1)$ и $(1, -1)$?

b) Покажите, что число ломанных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.

c) Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана C_n.

d) Покажите, что $C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

DL 7.4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1, 2\}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1\}$.

DL 7.5. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1\}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей натуральных чисел.

DL 7.6.

a) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.

b) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DL 7.7. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно $\mathbb{R}$.

DL 5.6. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат S. Интерпретация: носитель — точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикат: A, B, C лежат на одной прямой.

DL 4.2. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \cdots \oplus x_{2n-1}x_{2n}$. Докажите, что:

b) размер любого дерева решений для f не меньше 2^n.

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

$\boxed{\textbf{DL 4.5.}}$ **(Топологическая сортировка)** Докажите, что в ориентированном графе $G(V, E)$ без циклов все вершины можно пронумеровать числами от 1 до $|V|$ таким образом, чтобы рёбра шли из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами.

$\boxed{\textbf{DL 4.6.}}$ Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

$\boxed{\textbf{DL 3.3.}}$ Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.1. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n) = 1 - f(x_1, \ldots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

$\boxed{\textbf{DL 3.5.}}$ **(Теорема Поста)** Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотоная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \ldots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \ldots, 1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

b) с помощью композиций этих функций можно получить любую булеву функцию;
c) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

$\boxed{\textbf{DL 2.2.}}$ Булева функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется монотонной, если при $x \leqslant y$ выполняется $f(x) \leqslant f(y)$ ($x \leqslant y$, если для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $x_i \leqslant y_i$). Докажите, что:

b) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.

$\boxed{\textbf{DL 2.7.}}$ Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.