23 ноября 2017

Количество баллов на зачет: *9*

1. *(1.5 балла)* Пусть S — множество всех бесконечных последовательностей из 1 и 2, S^* — множество всех последовательностей из 1 и 2, не содержащих комбинаций 121 или 212. Приведите явную биекцию между этими множествами.

2. *(0.5 балла)* Какова мощность вещественных чисел, в двоичной записи которых встречаются только цифры 1 и 2?

3. Чему равна мощность декартова произведения счетного числа
   - *(1.5 балла)* счетных множеств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = N_1 \times N_2 \times \ldots = \prod_{i \in \mathbb{N}} N_i$, $|N_i| = |\mathbb{N}|$?
   - *(1.5 балла)* континуальных множеств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = R_1 \times R_2 \times \ldots = \prod_{i \in \mathbb{N}} R_i$, $|R_i| = |\mathbb{R}|$?

4. *(2.5 балла)* Пользуясь предыдущей задачей, определите мощность множества всех непрерывных функций $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

   Указание. Как много значений непрерывной функции нужно знать, чтобы остальные значения восстанавливались однозначно?

5. *(2.5 балла)* Найдите c, такое, что $\binom{n}{\sqrt{n}} = \frac{n^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}!} e^c (1 + o(1))$.

6. *(1.5 балла)* Докажите, что
$$\left(\frac{n}{k}\right)^k < \binom{n}{k} < \frac{n^n}{(n-k)^{(n-k)} k^k}, \quad n > k > 0$$

7. *(1 балл)* Докажите, что при фиксированных $m, k \in \mathbb{N}$
$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)} \sim \frac{k!}{m!} n^{m-k}$$

8. *(1.5 балла)* Найдите, чему эквивалентно $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$. Подсказка: $\frac{1}{m} = \int\limits_0^1 t^{m-1}\, dt$.

9. *(2 балла)* Оцените ("без калькулятора". $\ln(2) \approx 0.69315$, в году 365 дней) количество людей в группе, при котором вероятность того, что у двух из них совпадет день рождения, будет больше $1/2$.