10 Домашнее задание

10.1 (0,5 балла). Объяснить, что означает равенство

$$M_a \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \tag{1}$$

с комбинаторной точки зрения, то есть с точки зрения понятия смежности вершин графа G.

10.2 (1 балл). Вычислить спектр графа “звезда” с помощью комбинаторного смысла уравнения (1).

10.3 (1 балл). Пусть $\lambda \neq 0$ есть собственное значение кратности k матрицы смежности M_a произвольного двудольного графа G с блоками X и Y. Доказать, что $-\lambda$ также является собственным значением этой матрицы той же кратности k.

10.4 (1 балл). Доказать, что для любого простого графа G модуль собственного значения $|\lambda| \leqslant \Delta(G)$, где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин графа G.

10.5 (1,5 балла). Пусть G есть d-регулярный простой связный граф. Показать, что d есть собственное значение кратности 1, а все остальные собственные значения этого графа не превосходят по модулю d. Доказать, что условие $|\lambda| = \Delta(G) =: d$ выполняется тогда и только тогда, когда G является простым связным d-регулярным графом.

10.6 (1,5 балла). Предположим, что нам известен весь спектр

$$\mathrm{Sp}(G) = \begin{pmatrix} d & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_r \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_r \end{pmatrix}$$

d-регулярного графа. Доказать, что спектр дополнения $\bar{G}$ этого графа имеет вид

$$\mathrm{Sp}(\bar{G}) = \begin{pmatrix} n-1-d & -\lambda_2 - 1 & -\lambda_3 - 1 & \cdots & -\lambda_r - 1 \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_r \end{pmatrix}.$$

10.7 (0,5 балла). Доказать, что в случае d-регулярного простого графа наименьшее собственное число λ_n ограничено снизу величиной $k - n$.

10.8 (2,5 балла). Граф Петерсена относится к семейству так называемых сильно регулярных графов, то есть d-регулярных графов, у которых любая пара смежных вершин имеет одинаковое количество l общих соседей (в графе Петерсена $l = 0$), а также любая пара несмежных вершин имеет одинаковое количество m общих соседей (в графе Петерсена $m = 1$). Доказать, что матрица M_a смежности произвольного сильно регулярного графа удовлетворяет матричному уравнению вида

$$M_a^2 = (l - m) \cdot M_a + (d - m) \cdot E + m \cdot I, \tag{2}$$

дав комбинаторную интерпретацию этого равенства. Используя это равенство, определить собственные числа сильно регулярного графа G. Из условия $\mathrm{tr}(M_a(G)) = 0$ подсчитать кратность собственных чисел G. Как частный случай, получить отсюда спектр графа Петерсена, а также найти количество остовных деревьев в нем.

10.9 (0,5 балла). По определению, реберным графом (line graph) $L(G)$ неориентированного графа G называется граф, описывающий отношение смежности на множестве $E(G)$ ребер исходного графа G. Именно, реберным графом называется граф $L(G)$, любая вершина e которого соответствует некоторому ребру e графа G. При этом две вершины e_i и e_j графа $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра графа G инцидентны одной и той же вершине x графа G. Доказать, что матрица $M_a(L(G))$ смежности графа $L(G)$ равна

$$M_a(L(G)) = M_i(G)^T \cdot M_i(G) - 2E,$$

где $M_i(G)$ — матрица инцидентности исходного графа G.

10.10 (2 балла)**.** Предположим, что нам известен спектр

$$\mathrm{Sp}(G) = \begin{pmatrix} d & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_r \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_r \end{pmatrix}$$

d-регулярного графа G. Выразить через λ_i и γ_i спектр его реберного графа $L(G)$.

Указание. Показать, что матрицы M_a смежности и M_i инцидентности d-регулярного графа связаны соотношением

$$M_a = M_i \cdot M_i^T - d \cdot E.$$

Воспользоваться равенством вида

$$\det(d \cdot E - C \cdot D) = d^{m-n} \det(d \cdot E - D \cdot C),$$

справедливым для произвольной прямоугольной матрицы C размером $m \times n$ и произвольной прямоугольной матрицы D размером $n \times m$.

10.11 (0,5 балла)**.** Вычислить спектр графа Петерсена G, доказав, что $G = \overline{L(K_5)}$.

10.12 (1,5 балла)**.** Рассмотрим матрицу C, любая i-я строка которой, $i > 1$, получена циклическим сдвигом элементов первой строки. Например, матрица C размера 3×3 выглядит так:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что спектр этой матрицы состоит из n различных чисел вида

$$\lambda_\omega := a_1 + a_2\omega + \ldots + a_n\omega^{n-1}, \qquad \text{где } \omega \text{ есть корень } n\text{-й степени из единицы.}$$

10.13 (1,5 балла)**.** Вычислить спектр графа $G = C_n$.

10.14 (1,5 балла)**.** Показать, что спектр графа $G = P_n$ состоит из собственных чисел

$$\lambda_k = 2\cos(\pi k/(n+1)), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

кратность которых равна единице.