

NB: AVL - Агальсов-Вельский и Лангус

[Sleator, Tarjan]

Splay - дерево

Определим операцию $Splay(x)$, которая переносит в корень вершину x в корень

Аналог: MTF (move to front)

Лемма 1: Стоимость $Splay(x) = \Theta(\text{высоты } x)$

Лемма 2: $\exists \Phi$ - некоторая руниская потенциальная, определенная на деревьях:

1) $\Phi(T) = O(n \log n)$, n - # эл-ов

2) Угетная стоимость $Splay(x)$ относительно $\Phi = O(\log n)$

Угетные стоимости

$\exists c_1, c_2, \dots, c_m$ - реальные стоимости операций

$$\equiv \tilde{c}_i = c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1},$$

где Φ_i - значение потенциала в момент i

Если мы покажем, что $\tilde{c}_i \leq K \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum \tilde{c}_i = \sum c_i + \Delta \Phi \Rightarrow \quad \leftarrow = \log n$$

$$\Rightarrow \sum c_i \leq K \cdot m - \Delta \Phi = \Phi_m - \Phi_0$$

Аме $Splay(x)$: $\sum c_i = \sum \tilde{c}_i - \Delta \Phi =$

$$= m \cdot O(\log n) + O(n \log n) \Rightarrow$$

(1.2.2)

(1.2.1)

или $m = \Omega(n)$ $Splay(x)$ имеет стоимость $O(\log n)$

Сложность
1.2
30

Splay Find (x)

x = Find(x) // Find где потріба новина

Splay(x)

Splay Insert (x)

x = Insert(x)

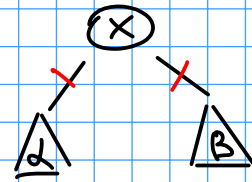
Splay(x)

Split (x) :

x = Find(x)

Splay(x)

return (x.left, x, x.right)



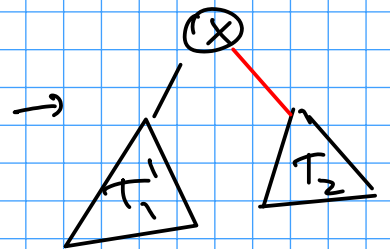
$$a \leq x \leq b$$

Merge (T1, T2): // T1 ≤ T2

x = Find Max (T1)

Splay(x)

x.right = T2



Splay Remove (x) :

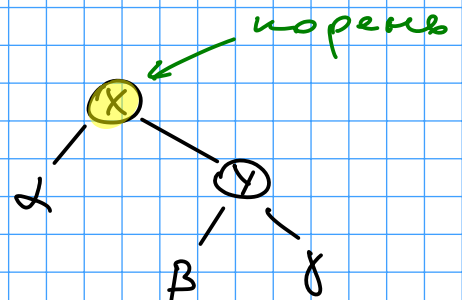
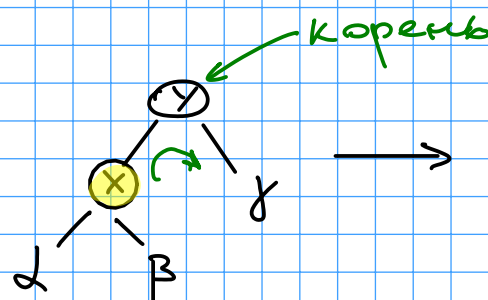
(T1, x, T2) = Split(x)

Merge (T1, T2)

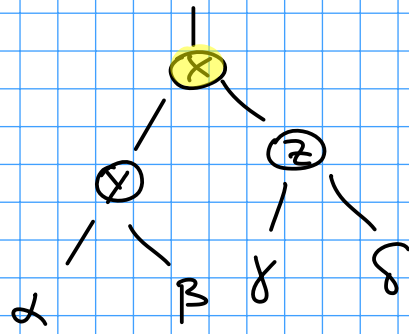
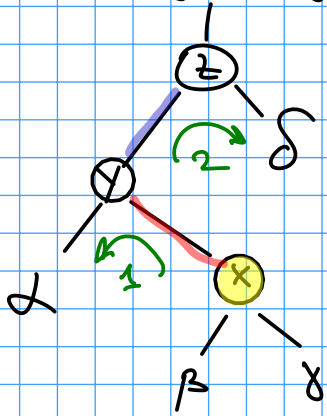
Увб: Все операції працюють за $O(\text{висоти}) +$
 стоїть $Splay(x) \Rightarrow$ працюють за $O(\text{висоти})$
 на

Операція Splay (x) :

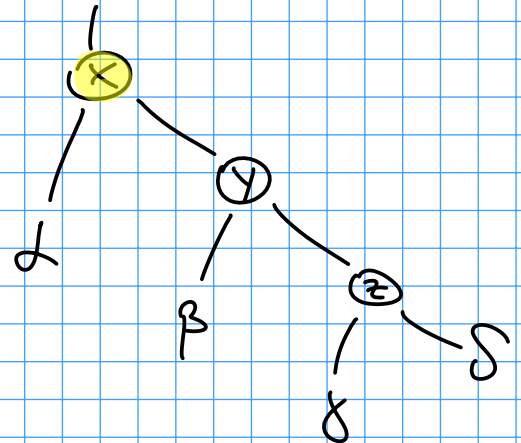
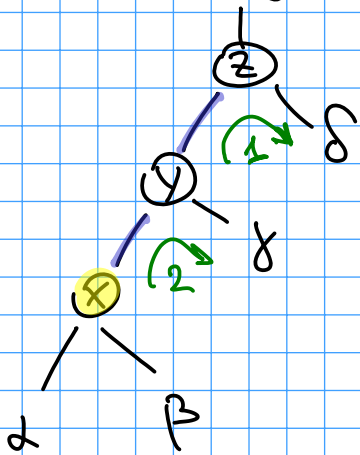
a) zig



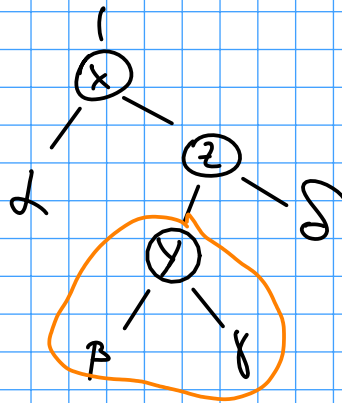
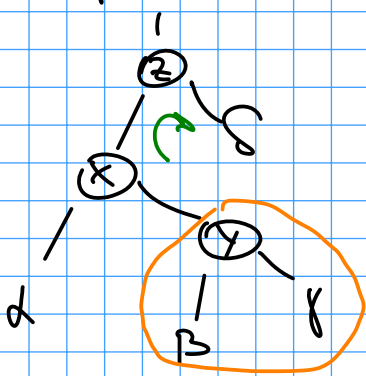
а) zig zag



б) zig zig



Замечание: если сделать повороты в обратной пореции, то получим



это плохо!

Следствие: лемма 1 доказана.

Доказательство л. 2.

$\exists w(x)$ - # вершин в поддереве с корнем x

$$\Phi(x) = \lfloor \log_2 \omega(x) \rfloor = O(\log n)$$

$$\Phi(T) = \sum_{x \in T} \Phi(x) \Rightarrow \Phi(T) = O(n \log n)$$

(доказан пунктом 1 л. 2)

Утв. а) стоимость zig шага $\leq 3(\Phi'(x) - \Phi(x)) + 1$
 $\Phi(x)$ - до Splay(x), $\Phi'(x)$ - после только в zig

б) Стоимость zigzag и zig zig $\leq 5(\Phi'(x) - \Phi(x))$

Следствие:

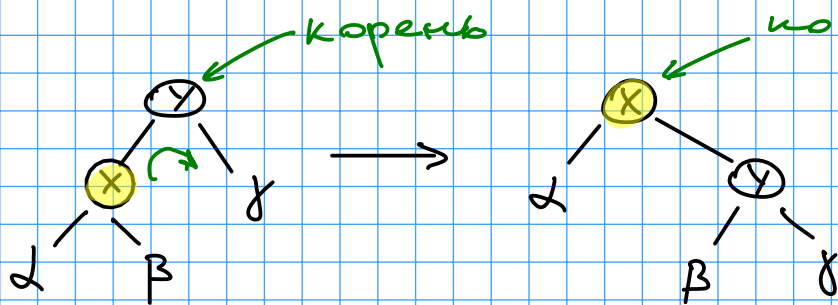
$$\text{Стоимость Splay}(x) \leq 3(\Phi'(x) - \Phi(x)) + 1 = O(\log n)$$

↑
корень

т.к. $\Phi(x) = O(\log n) \Rightarrow$ Splay(x) требует $O(\log n)$
 (пункт 2 л. 2)

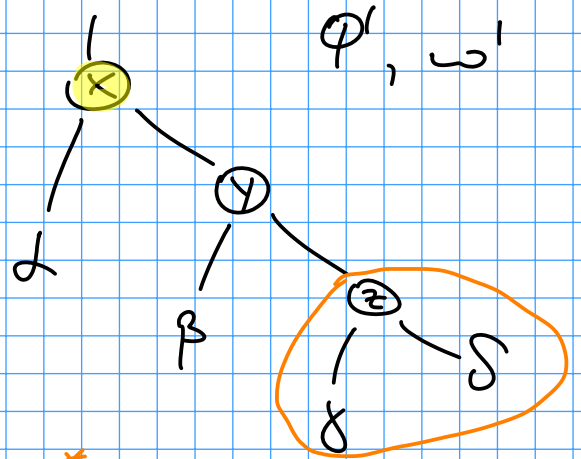
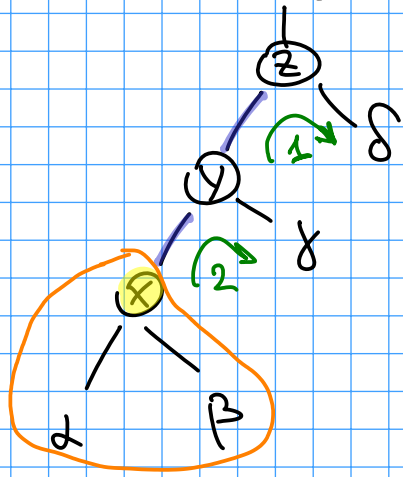
Доказано:

а) zig шаг



$$\begin{aligned} \tilde{c} &= c + \Delta \Phi = \leq \Phi'(x) \\ &= 1 + \cancel{\Phi'(x)} + \cancel{\Phi'(y)} - \Phi(x) - \Phi(y) \leq \\ &\leq 1 + \underbrace{\Phi'(x) - \Phi(x)}_{\geq 0} \leq \\ &\leq 1 + 3(\Phi'(x) - \Phi(x)) \end{aligned}$$

δ zig zig



$$\tilde{C} = c + \Delta \Phi(\tau) = \underbrace{1}_{\leq \Phi'(x)} + \cancel{\Phi'(x)} + \Phi'(y) + \Phi'(z) - \Phi(x) - \Phi(y) - \cancel{\Phi(z)}_{= \Phi'(x)} \leq$$

$$\leq \underbrace{1}_{\leq \Phi'(x)} + 2 \underbrace{(\Phi'(x) - \Phi(x))}_{\Delta} \leq 3(\Phi'(x) - \Phi(x))$$

$\Delta \geq 1$

Гип: $\Delta \geq 1$

От обратного: $\Delta = 0$ и тогда н-бо * сумма равенств

$$\begin{cases} \Phi'(x) = \Phi'(y) = \Phi'(z) = \Phi(z) \\ \Phi(x) = \Phi(y) \\ \Phi'(x) = \Phi(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi'(x) = \Phi(x) = \\ \Phi'(y) = \Phi(y) = \\ \Phi'(z) = \Phi(z) \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \lfloor \log_2 \omega(x) \rfloor$$

$\exists \omega, \omega'$ - это всевозможные p -ые g_0 и
числа $\text{Spray}(x)$

$$\exists k: 2^{k+1} > \omega'(x) \geq 2^k, \text{ т.е. } \Phi'(x) = k$$

$$\underline{2^{k+1}} > \omega'(x) = 3 + \omega'(d) + \omega'(\beta) + \omega'(\gamma) + \omega'(\delta) =$$

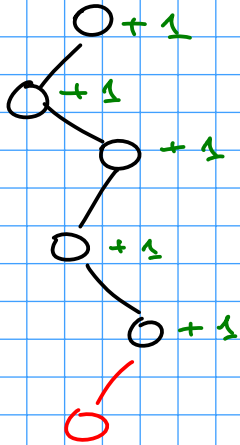
$$= \underbrace{(\omega(d) + \omega(\beta) + 1)}_{\omega(x)} + \underbrace{(\omega(\gamma) + \omega(\delta) + 1)}_{\omega'(z)} + 1 \geq$$

$$\geq 2^k + 2^k + 1 > \underline{2^{k+1}}$$

противоречие \square

Замечание 1:

Splay Insert увеличивает $\Phi(T)$ на $O(\log n)$



$$\pm 1 \text{ всего. } \begin{cases} \omega(x) = 2^{k+1} - 1 \\ \omega'(x) = 2^{k+1} \end{cases}$$

\Rightarrow не более $O(\log n)$
переходов на пути
от места к корню.

$$\Delta \Phi \leq (\# \text{ узлов } z \text{ с } \omega(z) \leq n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

Замечание 2:

Функция Splay Remove изменяет потенциал не более чем на $O(\log n)$

$$\Delta \Phi = \Delta \Phi_{\text{split}} + \Delta \Phi_{\text{merge}}$$

$$\begin{array}{l} \Delta \Phi_{\text{split}} = -O(\log n) \\ \Delta \Phi_{\text{merge}} = O(\log n) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{уменьшает потенциал} \\ \Rightarrow \Delta \Phi = O(\log n) \end{array} \right.$$

\leftarrow увеличивает потенциал корня