Задачи по алгебраическим структурам (SE). 2

(**3**) 14. Докажите теорему о разложении конечной циклической группы в прямое произведение.

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$*; тогда* $\mathrm{C}_{mn} \cong \mathrm{C}_m \times \mathrm{C}_n$*, если и только если* $\gcd(m, n) = 1$.

(**4**) 20. а) Пусть $\chi \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; докажите, что $5^{2^{\chi-2}} \equiv 1 + 2^{\chi} \pmod{2^{\chi+1}}$.

Пусть далее $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

б) Докажите, что $\mathrm{ord}(-1) = 2$ и $\mathrm{ord}(5) = 2^{\omega-2}$ в группе $(\mathbb{Z}/2^{\omega})^{\times}$.

в) Докажите, что $(\mathbb{Z}/2^{\omega})^{\times} \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_{2^{\omega-2}}$.

Комментарий к условию: мы определили элементы кольца $\mathbb{Z}/n$, где $n \in \mathbb{N}$, как числа $0, \dots, n-1$; часто эту запись удобно расширить, считая, что в этом кольце данный элемент можно записывать в виде любого целого числа, остаток которого по модулю n равен этому элементу (например, $-2 = 0 = 2 = 4$ и $-3 = -1 = 1 = 3$ в кольце $\mathbb{Z}/2$, $-3 = 1 = 5 = 9$ и $-5 = -1 = 3 = 7$ в кольце $\mathbb{Z}/4$).

Указания к задачам

14. Сначала докажите импликацию “$\gcd(m, n) \neq 1 \Rightarrow \mathrm{C}_{mn} \ncong \mathrm{C}_m \times \mathrm{C}_n$”.

Далее, для того, чтобы доказать импликацию “$\gcd(m, n) = 1 \Rightarrow \mathrm{C}_{mn} \cong \mathrm{C}_m \times \mathrm{C}_n$”, укажите такие подгруппы F и H группы C_{mn}, что $F \cong \mathrm{C}_m$, $H \cong \mathrm{C}_n$ и подгруппы F и H удовлетворяют условиям теоремы о прямом произведении, а затем используйте эту теорему. (Так как $|\mathrm{C}_{mn}| < \infty$, условие “$G = FH$” в теореме о прямом произведении можно заменить на условие “$|G| = |F||H|$”.)

20. а) Используйте индукцию по χ.

б) Используйте пункт а.

в) Используйте пункт б и теорему о прямом произведении. (Так как $|(\mathbb{Z}/2^{\omega})^{\times}| < \infty$, условие “$G = FH$” в теореме о прямом произведении можно заменить на условие “$|G| = |F||H|$”.)

Задачи′

(**2**) 1′. Пусть G — группа и $|G|$ — простое число; докажите, что группа G циклическая.

(**2**) 2′. Пусть G — группа и $|G| = 4$; докажите, что $G \cong \mathrm{C}_4$ или $G \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$.