Типы в языках программирования
Лекция 5. Нормализация для простой системы

Денис Николаевич Москвин

СПбАУ РАН

22.03.2018

План лекции

1. Понятие нормализации
2. Слабая нормализация
3. Сильная нормализация

План лекции

1. Понятие нормализации

2. Слабая нормализация

3. Сильная нормализация

Слабая и сильная нормализация для терма

Определение

Терм называют ***слабо (weak) нормализуемым*** (WN), если существует последовательность редукций, приводящих его к нормальной форме.

Определение

Терм называют ***сильно (strong) нормализуемым*** (SN), если любая последовательность редукций, приводит его к нормальной форме.

Примеры

Терм $\mathbf{K\,I\,K}$ — сильно нормализуем,
терм $\mathbf{K\,I\,\Omega}$ — слабо нормализуем,
терм $\mathbf{\Omega}$ — не нормализуем.

Слабая и сильная нормализация для системы типов

Определение

Систему типов называют ***слабо нормализуемой*** если все её допустимые термы слабо нормализуемы.

Определение

Систему типов называют ***сильно нормализуемой*** если все её допустимые термы сильно нормализуемы.

- Что можно сказать про нормализуемость $\lambda_{\to}$?

Слабая и сильная нормализация для системы типов

Определение

Систему типов называют ***слабо нормализуемой*** если все её допустимые термы слабо нормализуемы.

Определение

Систему типов называют ***сильно нормализуемой*** если все её допустимые термы сильно нормализуемы.

- Что можно сказать про нормализуемость $\lambda_{\to}$?
- В отношении нормализации и карриевская и черчевская системы ведут себя одинаково, поэтому мы будем рассматривать их совместно, атрибутируя типами все, что можно, в тот момент, когда нам это потребуется.

План лекции

Способы порождения редексов при β-редукции

Имеются 4 способа образования «нового» редекса в процессе редукции:

1. Создание:

$$(\lambda x.\ \ldots (x\,P) \ldots)(\lambda y.\,Q) \longrightarrow \ldots((\lambda y.\,Q)P)\ldots$$

2. Умножение (тут не по-настоящему «новый»):

$$(\lambda x.\ \ldots x \ldots x \ldots)((\lambda y.\,Q)R) \longrightarrow \ldots((\lambda y.\,Q)R)\ldots((\lambda y.\,Q)R)\ldots$$

3. Спрятанный редекс:

$$(\lambda x.\,\lambda y.\,Q)P\,R \longrightarrow (\lambda y.\,[x \mapsto P]Q)\,R$$

4. Сокращение `id`:

$$(\lambda x.\,x)(\lambda y.\,Q)P \longrightarrow (\lambda y.\,Q)P$$

Как доказать слабую нормализуемость?

- Схема доказательства:
  1. Зададим подходящую меру на термах.
  2. Опишем конкретную стратегию, каждый шаг которой сокращает эту меру.
- Отметим, что тривиальные меры (например, число редексов) не работают.
- Отметим также, что решение задачи *сильной* нормализации подобным образом представляет собой открытую проблему.

Мера терма: подготовительные определения

Определение: порядок типа

Для типа ρ его ***порядок*** $\mathrm{ord}(\rho)$ определим индуктивно:

$$\mathrm{ord}(\alpha) = 0,$$
$$\mathrm{ord}(\sigma \to \tau) = \max(\mathrm{ord}(\sigma) + 1, \mathrm{ord}(\tau)).$$

или, эквивалентно:

$$\mathrm{ord}(\alpha) = 0,$$
$$\mathrm{ord}(\sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha) = 1 + \max(\mathrm{ord}(\sigma_1), \ldots, \mathrm{ord}(\sigma_n)).$$

Определение: высота редекса

Высотой редекса $(\lambda x : \sigma.\, P)Q$ называется порядок типа его левого аппликанда $\lambda x : \sigma.\, P$.

Например, $h((\lambda x : \sigma.\, x)Q) = \mathrm{ord}(\sigma) + 1$.

Мера терма: определение

Определение: мера терма

Для терма P его ***меру*** $m(P)$ определим как лексикографическую пару:

$$m(P) = (h_{max}(P), \sharp N)$$

где $h_{max}(P)$ — наибольшая высота редекса в P, а $\sharp N$ — число редексов такой высоты.

Стратегия слабой нормализации

Выбирать для сокращения редекс наибольшей высоты, который не содержит субредексов такой же высоты.

1. Это всегда можно сделать.
2. Это всегда приводит к сокращению нашей меры.

План лекции

1. Понятие нормализации
2. Слабая нормализация
3. Сильная нормализация

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\rightarrow}$, сильно нормализуем.
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \not\Rightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например,

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\rightarrow}$, сильно нормализуем.
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \not\Rightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\,x\,x$.

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\rightarrow}$, сильно нормализуем.
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \not\Rightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\,x\,x$.
- Однако в обратную сторону это верно: $M\,N \in \mathcal{SN} \Rightarrow M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN}$. Почему?

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\to}$, сильно нормализуем.
- Обозначим через SN множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in SN \wedge N \in SN \not\Rightarrow M\,N \in SN$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\, x\, x$.
- Однако в обратную сторону это верно: $M\,N \in SN \Rightarrow M \in SN \wedge N \in SN$. Почему?
- Верно ли, что $[x \mapsto N]M \in SN \Rightarrow (\lambda x.\, M)N \in SN$?

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\to}$, сильно нормализуем.
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \not\Rightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\,x\,x$.
- Однако в обратную сторону это верно: $M\,N \in \mathcal{SN} \Rightarrow M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN}$. Почему?
- Верно ли, что $[x \mapsto N]M \in \mathcal{SN} \Rightarrow (\lambda x.\,M)N \in \mathcal{SN}$? Нет! $N = \Omega \wedge x \notin FV(M)$.

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\to}$, сильно нормализуем.
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \not\Rightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\,x\,x$.
- Однако в обратную сторону это верно: $M\,N \in \mathcal{SN} \Rightarrow M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN}$. Почему?
- Верно ли, что $[x \mapsto N]M \in \mathcal{SN} \Rightarrow (\lambda x.\,M)N \in \mathcal{SN}$? Нет! $N = \Omega \wedge x \notin FV(M)$.
  Да, если потребовать $N \in \mathcal{SN}$. Докажем ниже в чуть более общем виде.

Теоретико-множественная интерпретация $\lambda_{\to}$

- Для произвольных множеств термов $X, Y \subset \Lambda$ определим подмножество «лямбда-определимых» функций из X в Y:

$$X \to Y = \{F \in \Lambda \mid \forall S \in X.\ F\,S \in Y\}$$

- Для произвольного типа $\rho \in \mathbb{T}$ определим интерпретацию $[\![\rho]\!] \subset \Lambda$ индуктивно:
  - $[\![\alpha]\!] = SN$, где α — переменная типа;
  - $[\![\sigma \to \tau]\!] = [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]$, где σ и τ — произвольные типы.
- Пример:
  $[\![\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!] = SN \to SN$.
- Интерпретация «шире» типа: нам достаточно, чтобы типизированный терм вкладывался в свою интерпретацию («корректность интерпретации», докажем своевременно).

Насыщенные множества

Множество $X \subseteq SN$ называется ***насыщенным (saturated)***, если:

1. $\forall x \in V \quad \forall n \geqslant 0 \quad \forall R_1, \ldots, R_n \in SN$
   $x \overrightarrow{R} \in X$,
   то есть насыщенное множество X содержит все переменные и все аппликации переменных к SN-термам;
2. $\forall P \in \Lambda \quad \forall Q \in SN \quad \forall n \geqslant 0 \quad \forall R_1, \ldots, R_n \in SN$
   $([x \mapsto Q]P) \overrightarrow{R} \in X \;\Rightarrow\; (\lambda x.\, P) Q \overrightarrow{R} \in X$,
   то есть вместе с любым своим термом насыщенное множество X содержит все те его одношаговые экспансии, которые дают этот терм сокращением головного редекса, причем подставляемый терм (Q) должен быть сильно нормализуем.

Множество всех насыщенных подмножеств Λ назовем SAT.

Леммы о насыщенных множествах

1. Множество $\mathcal{SN}$ сильно нормализуемых термов насыщенно.
2. Если множества термов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ насыщенны, то множество $\mathcal{X} \to \mathcal{Y} = \{F \in \Lambda \mid \forall S \in \mathcal{X}.\ F\,S \in \mathcal{Y}\}$ тоже насыщенно.
3. Для произвольного типа $\rho \in \mathbb{T}$ интерпретация $[\![\rho]\!]$ насыщенна.

Лемма 3 доказывается индукцией по структуре типа: базу обслуживает Лемма 1, а шаг — Лемма 2.

Лемма 1

Множество сильно нормализуемых термов насыщенно: $SN \in SAT$.

- $SN \subseteq SN$.
- Первое требование к насыщенности выполняется тривиально: для $\forall x \in V$

$$x \, \overrightarrow{R} \in SN$$

- Пусть

$$([x \mapsto Q]P) \, \overrightarrow{R} \in SN \tag{1}$$

Покажем, что

$$(\lambda x.\, P) Q \, \overrightarrow{R} \in SN \tag{2}$$

- $[x \mapsto Q]P \in \mathcal{SN}$ как подтерм SN-терма, поэтому $P \in \mathcal{SN}$.
- Возьмем $(\lambda x.\, P)Q\overrightarrow{R}$ и сделаем конечное число редукций в P, Q и прочих $\overrightarrow{R}$. Получим:

$$(\lambda x.\, P')Q'\overrightarrow{R'}$$

Сократим:

$$([x \mapsto Q']P')\overrightarrow{R'} \tag{3}$$

Это редукт сильно нормализуемого $([x \mapsto Q]P)\overrightarrow{R}$, поэтому он тоже $\mathcal{SN}$, откуда $(\lambda x.\, P)Q\overrightarrow{R}$ тоже $\mathcal{SN}$. ■

Лемма 2

Если X и Y насыщенны, то $X \rightarrow Y = \{F \in \Lambda \mid \forall S \in X.\ F\,S \in Y\}$ тоже насыщенно.

- X насыщенно, поэтому для $\forall x \in V$ верно $x \in X$.
- $F \in X \rightarrow Y \ \Rightarrow\ F\,x \in Y \ \Rightarrow\ F\,x \in SN \ \Rightarrow\ F \in SN$ (определение $\rightarrow$; $Y \subseteq SN$; F — подтерм $F\,x$)
  То есть $X \rightarrow Y \subseteq SN$.
- Для $\forall x \in V$ и $\forall \overrightarrow{S} \in X$ верно $x\,\overrightarrow{R}\,\overrightarrow{S} \in Y$, поскольку $X \subseteq SN$, а Y — насыщено. Отсюда следует первое условие насыщенности для $X \rightarrow Y$:

$$\forall x \in V \quad x\,\overrightarrow{R} \in X \rightarrow Y$$

- Второе условие насыщенности для $X \rightarrow Y$ получается аналогично из второго условия для Y

$$([x \mapsto Q]P)\,\overrightarrow{R}\,S \in Y \Rightarrow (\lambda x.\,P)\,Q\,\overrightarrow{R}\,S \in Y \quad \blacksquare$$

Корректность интерпретации $[\![-]\!]$: проблема

- Наша цель теперь доказать корректность интерпретации, то есть $M : \sigma \Rightarrow M \in [\![\sigma]\!]$.
- Однако утверждение типизации в общем случае имеет контекст: $\Gamma \vdash M : \sigma$.
- При индукции по выводу $\Gamma \vdash M : \sigma$ возникает проблема для случая, когда $M = \lambda x.\, M'$ и, соответственно, $\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$. Нужно доказать (имея IH $M' \in [\![\sigma_2]\!]$)

$$
\begin{array}{l}
\lambda x.\, M' \in [\![\sigma_1 \to \sigma_2]\!] \\
\lambda x.\, M' \in \{F \mid \forall P \in [\![\sigma_1]\!].\, F\, P \in [\![\sigma_2]\!]\} \\
\forall P \in [\![\sigma_1]\!] \Rightarrow (\lambda x.\, M')\, P \in [\![\sigma_2]\!] \\
\forall P \in [\![\sigma_1]\!] \Rightarrow [x \mapsto P]\, M' \in [\![\sigma_2]\!]
\end{array}
$$

Это никак не следует из нашего определения интерпретации.

- Решение проблемы — задать оценку (valuation) для всех переменных контекста Γ.

Теорема. Корректность интерпретации $[\![-]\!]$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 : \rho_1, \ldots, x_k : \rho_k \vdash M : \sigma \\ P_1 \in [\![\rho_1]\!], \ldots, P_k \in [\![\rho_k]\!] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$[x_1 \mapsto P_1, \ldots, x_k \mapsto P_k]\, M \in [\![\sigma]\!].$$

Доказательство. Индукция по выводу $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Корректность, доказательство

- $\Gamma \vdash M : \sigma$ при $M = x$.
  По лемме генерации $x : \sigma \in \Gamma$. Тогда для произвольного $P \in [\![\sigma]\!]$ получаем $[x \mapsto P]\,M = [x \mapsto P]\,x = P$.
- $\Gamma \vdash M : \sigma$ при $M = M_1\,M_2$.
  По лемме генерации $\Gamma \vdash M_1 : \tau \to \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \tau$.
  Обозначим подстановку $[x_1 \mapsto P_1, \ldots, x_k \mapsto P_k]$ через S.
  По IH имеем $S(M_1) \in [\![\tau \to \sigma]\!]$ и $S(M_2) \in [\![\tau]\!]$. Но

$$S(M_1\,M_2) = (S(M_1))(S(M_2)) \in [\![\sigma]\!]$$

  в соответствии с интерпретацией стрелочного типа в определении интерпретации.

- $\Gamma \vdash M : \sigma$ при $M = \lambda x.\, M'$.
  По лемме генерации $\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ и $\Gamma, x : \sigma_1 \vdash M' : \sigma_2$.
  Обозначим подстановку $[x_1 \mapsto P_1, \ldots, x_k \mapsto P_k]$ через S.
  По IH имеем, что для произвольного $P \in [[\sigma_1]]$ верно

  $$(S \circ [x \mapsto P])(M') \in [[\sigma_2]].$$

  Рассмотрим

  $$(S(\lambda x.\, M'))P = (\lambda x.\, S(M'))P = (S \circ [x \mapsto P])(M') \in [[\sigma_2]].$$

  Но поскольку $P \in [[\sigma_1]]$ и произволен, имеем
  $S(\lambda x.\, M') \in [[\sigma_1 \to \sigma_2]]$.

■

Сильная нормализация

$$\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; M \in SN$$

Доказательство.

- Положим в предыдущей теореме все $P_i = x_i$. Это можно сделать, поскольку каждое $[[\rho_i]]$ насыщенно, а значит содержит любые термовые переменные, $x_i \in [[\rho_i]]$.
- Тогда подстановка в заключении теоремы станет тождественной, и мы получим $M \in [[\sigma]] \subseteq SN$.

■