DL 5.1. Выразите предикаты в арифметике:
a) $x = 3$;
b) y делится на 4.

DL 5.2. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, <)$ на множестве целых чисел. Как выразить предикат $y = x + 1$?

DL 5.3. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, y = x^2)$ на множестве вещественных чисел. Как выразить предикат $xy = z$?

DL 5.4. Рассмотрим множество целых положительных чисел как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства и предикат «x делит y».
a) Как выразить предикат $x = 1$?
b) Как выразить предикат x — простое число?
c) Если добавить к этой сигнатуре константу 2, то как выразить предикат $\exists n\ x = 2^n$?

DL 5.5. Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадения точек) и двуместный предикат «находиться на расстоянии 1». Выразите предикаты:
a) «находиться на расстоянии не более 2»?
b) «находиться на расстоянии 2»;

DL 5.6. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат S. Интерпретация: носитель — точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикат: A, B, C лежат на одной прямой.

DL 4.2. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \cdots \oplus x_{2n-1}x_{2n}$. Докажите, что:
b) размер любого дерева решений для f не меньше 2^n.

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

DL 4.5. **(Топологическая сортировка)** Докажите, что в ориентированном графе $G(V, E)$ без циклов все вершины можно пронумеровать числами от 1 до $|V|$ таким образом, чтобы рёбра шли из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами.

DL 4.6. Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DL 3.3. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.1. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0,1\}$.

DL 3.5. **(Теорема Поста)** Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотоная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0,\dots,0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1,\dots,1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

b) с помощью композиций этих функций можно получить любую булеву функцию;
c) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DL 2.2. Булева функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется монотонной, если при $x \leqslant y$ выполняется $f(x) \leqslant f(y)$ ($x \leqslant y$, если для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $x_i \leqslant y_i$). Докажите, что:

b) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.

DL 2.7. Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.