Алгоритм Джонсона

Флойд-Уоршелл $O(V^3)$

$N \cdot$ Форд-Беллмана $O(V^2 \cdot E)$

$N \cdot$ Дейкстра $O(V(V+E) \cdot \log V)$

$$V \ll E \ll V^2/\log V$$

Лемма:

$\exists\ f: V \to \mathbb{R}$

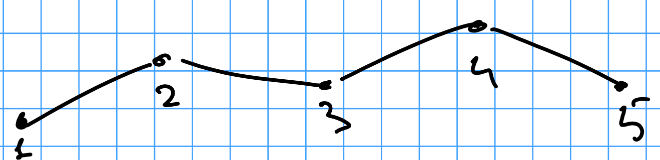
$w'(u,v) = w(u,v) + f(u) - f(v)$

Кратчайшие пути для (V, E) и (V, E') совпадают.

$\triangleright$ $\delta(u,v)$ – ф-ия расст. от u до v

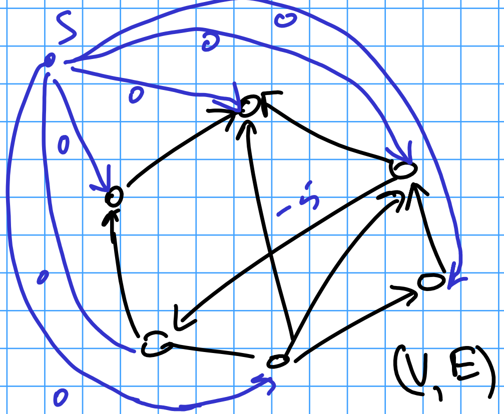
$\triangleleft$ $\delta'(u,v) = \delta(u,v) + f(u) - f(v)$

δ' – ф-я расст. в новом графе.



$\delta(1,5) = w'(1,2) + w'(2,3) + w'(3,4) + w'(4,5) =$

$= \underline{w(1,2)} + \underline{f(1)} - \cancel{f(2)} + \underline{w(2,3)} + \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)} +$
$+ \underline{w(3,4)} + \cancel{f(3)} - \cancel{f(4)} + \underline{w(4,5)} + \cancel{f(4)} \underline{- f(5)} =$
$= \delta(1,5) + \underline{f(1) - f(5)}$ $\triangleleft$



$w(s, u) = \varnothing$

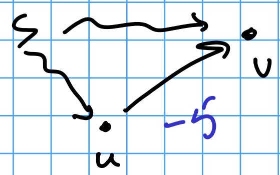
Запускаем Беллмана - Форда

Есть отриц. циклы

$\delta(s, u)$

$$w'(u, v) = w(u, v) + \delta(s, u) - \delta(s, v) \geqslant$$

? $\quad w'(u, v) \geqslant 0$



$$\triangleright \quad \delta(s, v) \leqslant \delta(s, u) + w(u, v)$$

$$\delta(s, u) - \delta(s, v) \geqslant -w(u, v)$$

$$\Downarrow$$

$$w'(u, v) \geqslant 0 \qquad \triangleleft$$

$\geqslant w(u, v) - w(u, v)$

$\geqslant 0$

Схема алг-ма Джонсона

$V' = V + \{s\}$

for $v \in V$:

$\quad w(s, v) = 0$

Алг. Беллмана - Форда // δ

for $(u, v) \in E$:

$\quad w'(u, v) = w(u, v) + \delta(s, u) - \delta(s, v)$

for $v \in V$:

$\quad$ Дейкстра (v) // δ'

for $u, v \in V$:

$\quad \delta^*(u, v) = \delta'(u, v) - \delta(s, u) + \delta(s, v)$

return δ^*