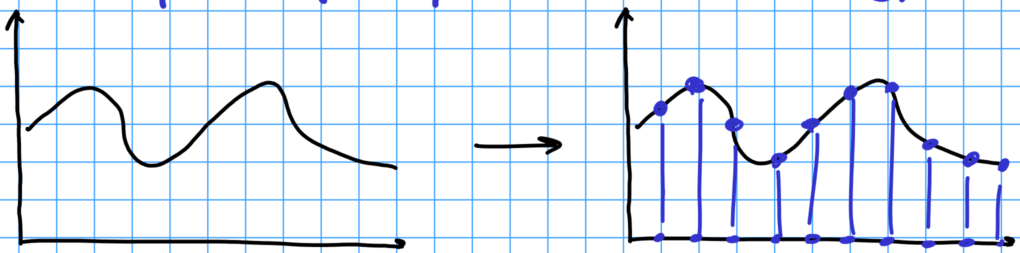
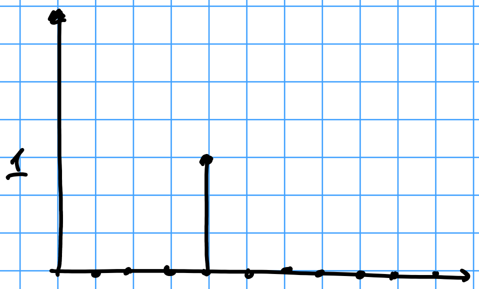
Быстрое преобразование Фурье





Умножение чисел

$$\overline{a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_0} \times \overline{b_{n-1}\, b_{n-2} \dots b_0}$$

$O(n^2)$ — "в лоб"

$O(n^{\log_2 3})$ — "Карацуба"

$O(n \log n)$ $\quad$ $O(n \log^2 n)$ $\quad$ $O(n \log n \log\log n)$ ...

Умножение полиномов

$$(a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0) \times (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0) =$$

$$= (c_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + c_0)$$

Умножение "в лоб" $O(n^2)$

≡ Альтернативное представление полиномов.

$A(x) = \underbrace{a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}$ $\xrightarrow{\text{вычислить}}$

Можно задать $A(x)$: $\underbrace{(A(x_1), A(x_2) \dots A(x_n))}_{x_i \ne x_j,\ i \ne j}$

$$(A(x_1), \dots, A(x_n)) \to (a_{n-1}, \dots, a_0)$$

≡ Интерполяционного полинома Лагранжа

$$A_1 = \{A_1(x_1) = A(x_1),\ A_1(x_i) = 0\}$$

$$A_1(x_1) = A(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}$$

$$A(x) = \sum A_i(x)$$

$$A(x) = (A(x_1), A(x_2)\dots, A(x_n), \dots, A(x_{2n-1}))$$
$$B(x) = (B(x_1), B(x_2), \dots, B(x_n), \dots, B(x_{2n-1}))$$

$$C(x) = A(x) \times B(x)$$

$$C(x_i) = A(x_i)\cdot B(x_i)$$

! В таком представлении перемножать можно за $O(n)$!

$$\begin{tikzcd} \boxed{A(x):\ (a_{n-1}, \dots, a_0)} \arrow[r, bend left, "\text{вычисление}"] & \boxed{A(x):\ (A(x_1)\dots A(x_n))} \arrow[l, bend left, "\text{интерполяция}"] \end{tikzcd}$$

Вычисление:

$$A(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \qquad n\text{ - чётное}$$

$$x A_1(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_3x^3 + a_1x^1$$
$$A_0(x) = a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + \dots + a_2x^2 + a_0$$

$$A(x) = A_0(x) + x A_1(x)$$
$$A_1'(x) = a_{n-1}x^{\frac{n-2}{2}} + a_{n-3}x^{\frac{n-4}{2}} + \dots + a_1$$
$$A_0'(x) = a_{n-2}x^{\frac{n-2}{2}} + a_{n-4}x^{\frac{n-4}{2}} + \dots + a_0$$

полиномы размера $n/2$

$$A(x) = A_0'(x^2) + x A_1'(x^2)$$

Давайте вычислим $A(x)$ и $A(-x)$:

$$A(x) = A_0'(x^2) + x\,A_1'(x^2)$$
$$A(-x) = A_0'(x^2) - x\,A_1'(x^2)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$
$$T(n) = O(n \log n)$$

$$\begin{array}{ccc} A(x_i) & & A(-x_i) \\ & \searrow \swarrow & \\ & A(x_i^2) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A(x_j) & & A(-x_j) \\ & \searrow \swarrow & \\ & A(x_j^2) & \end{array}$$

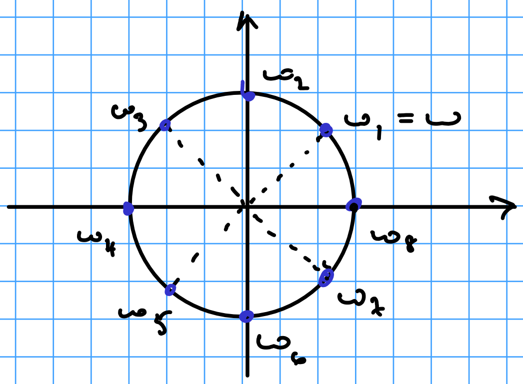
$$(x_i^2)^2 = -(x_j^2)^2 \Leftarrow (x_i)^2 = -(x_j)^2$$

Давайте работать не $\mathbb{R}$, а в $\mathbb{C}$.

Будем вычислять $A(x)$ в корнях из 1 n-ого порядка.

$\omega = \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$

$$(\omega_i)^n = 1$$



F.E.: $\omega_5^2 = \omega_2$

Корни n-го порядка в квадрате

$\Downarrow$

корни порядка $n/2$

ω_1 - первообразующий корень

$\omega_3 = \omega_1^3 \quad \ldots \quad \omega_7 = \omega_1^7$

$$A(1)$$

$$A(-1) \qquad A(1)$$

$$A(-i) \quad A(i) \quad A(-1) \quad A(1)$$

первообразный корень из 1 n-го порядка

$$FFT\big((a_{n-1}\dots a_0),\ \omega\big) \to \big(A(\omega), A(\omega^2), A(\omega^3)\dots\big)$$

if $\omega = 1$:

  return $A(1)$

$$\big(A_1(\omega^2), A_1(\omega^4), A_1(\omega^6)\dots\big) = FFT\big((\underline{a_{n-1}, a_{n-3}, \dots, a_1}), \underline{\omega^2}\big)$$

$$\big(A_0(\omega^2), A_0(\omega^4), \dots\big) = FFT\big((a_{n-2}, a_{n-4}, \dots, a_0), \omega^2\big)$$

for $i = 1 \dots n/2$

$$A(\omega^i) = \underline{A_0(\omega^{2i})} + \omega^i \underline{A_1(\omega^{2i})}$$

$$A(\underline{\omega^{i+n/2}}) = A_0(\omega^{2i}) - \omega^i A_1(\omega^{2i})$$

$-\omega^i$

Интерполяция:

$$\underset{\vec{A}}{(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)} = \frac{1}{n} FFT\Big(\big(A(\omega), A(\omega^2), \dots, A(\omega^n)\big), \omega^{-1}\Big)$$

$$\begin{array}{ccccc} \vec{A} & & M(\omega) & & \vec{a} \\ \begin{bmatrix} A(1) \\ A(\omega_1) \\ A(\omega_2) \\ A(\omega_3) \\ \vdots \\ A(\omega_{n-1}) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega_{n-1} & \omega_{n-1}^2 & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

Матрица Вандермонда $(1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})$

Является обратной, если $\omega_i \neq \omega_j$

$$M(\omega)\cdot M(\omega^{-1}) = nI$$

к клетку (i,j):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_i^{k}\cdot \omega_k^{-j} \underset{\omega_i=\omega^i}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ki-jk} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{i-j}\right)^k \underset{i\neq j}{=}$$

$$= \frac{\cancelto{1}{\omega^{(i-j)n}} - 1}{\omega^{i-j}-1} = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j$$

При $i=j$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{0}\right)^k = n$$

На диагонали: n

В остальных клетках: $\emptyset$

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= M(\omega)\cdot\vec{a} \\ M(\omega)\cdot M(\omega^{-1}) &= n\cdot I \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{1}{n} M(\omega^{-1})\cdot\vec{A} = \vec{a}$$

Умножение полиномов

$$?\ \begin{cases} (a_{n-1}\dots a_0) \\ (b_{n-1}\dots b_0) \end{cases} \to (c_{n-1}\dots c_0) =$$

$$= \frac{1}{n}\,\mathrm{FFT}\Big(\mathrm{FFT}\big((a_{n-1}, a_0), \omega\big) \times \mathrm{FFT}\big((b_{n-1}..b_0), \omega\big), \omega^{-1}\Big)$$

$O(n\log n)$