Совершенные графы. Теорема Турана.

11 марта 2017 г.

1. Доказать, что $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \geq 2\sqrt{n}$.

2. Предположим, что верно следующее утверждение: граф G является совершенным тогда и только тогда, когда для любого индуцированного подграфа H графа G выполняется неравенство

$$|V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

   Доказать, что из этого утверждения следует теорема о совершенном графе.

3. Доказать, что любой двудольный граф $G[X, Y]$ является совершенным графом, как с помощью определения совершенного графа, так и с помощью теоремы о совершенных графах.

4. Напомним, что реберным графом (line graph) $L(G)$ графа G называется граф, вершинам которого соответствуют ребра графа G. При этом две вершины $e, f \in L(G)$ реберного графа смежны в $L(G)$, если они имеют общую концевую вершину в графе G. Доказать, что реберный граф любого двудольного графа является совершенным.

5. Докажите, что

$$t(G) \geq \binom{n}{3} + \frac{2m^2}{n} - m(n-2),$$

   где $t(G)$ — это количество треугольников в G или $\bar{G}$

6. Рассмотрим n замкнутых интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_n$ на вещественной оси. Построим для этих интервалов граф G на n вершинах $x_1, \ldots, x_n$, соединяя вершины x_i и x_j ребром в том и только в том случае, когда пересечение $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Такой граф G называется *интервальным* графом. Доказать, что интервальный граф является совершенным, то есть что $\chi(G) = \omega(G)$.

7. Докажите, что хордальный граф является совершенным. Хордальный граф — это граф не содержащий индуцированных циклов длины 4 и более.

8. *Графом сравнимости* (comparability graph) называют граф G, связанный с некоторым частично упорядоченным множеством $(P, \preccurlyeq)$. Множество вершин графа G совпадает с множеством P элементов частично упорядоченного множества. Если два элемента $x, y \in P$, $x \neq y$, сравнимы между собой (то есть $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$), то соответствующие этим элементам вершины x, y графа G соединены между собой ребром.

   По другому этот граф можно определить следующим образом. *Транзитивной ориентацией* графа G называется такая ориентация D ребер этого графа, при которой для любых ориентированных ребер $(x, y) \in E(D)$ и $(y, z) \in E(D)$ найдется ориентированное ребро $(x, z) \in D$. В этих терминах граф G называется графом сравнимости, если в нем существует транзитивная ориентация.

   Доказать, что граф сравнимости является совершенным графом, как с помощью теоремы Мирского, так и без нее. Показать эквивалентность теоремы Мирского утверждению о том, что граф сравнимости совершенен.

9. Доказать теорему Дилуорса для частично упорядоченного множества $(P, \preccurlyeq)$ с помощью теоремы о совершенном графе.