Дополнительные простые задачи к первому домашнему заданию

.

1. Пусть x_n и y_n — последовательности вещественных чисел. Пусть $X = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $Y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, а функции $N_x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $N_y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ таковы, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N_x(\varepsilon)$ выполнено $|x_n - X| < \varepsilon$, а при $n > N_y(\varepsilon)$ выполнено $|y_n - Y| < \varepsilon$. Найдите предел $Z = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ и функцию $N_z\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такую, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N_z(\varepsilon)$ выполнено $|z_n - Z| < \varepsilon$, если последовательность z_n задана соотношением

а) (1) $z_n = \frac{1}{y_n}$ (считать $Y \neq 0$);
б) (1) $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ (считать $Y \neq 0$);
в) (1) $z_n = x_n^2 y_n + y_n^2 x_n$;
г) (1) $z_n = \frac{x_n^2 y_n + y_n^2 x_n}{1+(x_n+y_n)^2}$;

2. (1) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(\left(1+\dfrac{q}{n}\right)^p - \left(1+\dfrac{p}{n}\right)^q \right)$ при $p, q \in \mathbb{N}$.

3. Найдите $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, если:

$$\text{А) (1) } x_n = \frac{(1-(-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}; \qquad \text{Б) (1) } x_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 2}; \qquad \text{В) (1) } x_n = \sqrt{n^2+2n} - n.$$

Дополнительные задачи к первому домашнему заданию

.

4. (1) Докажите, что ограниченная последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условию $a_{n+1} \geqslant a_n - \dfrac{1}{2^n}$, сходится.

5. (2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1}{n} = ab.$$

6. (1) Существует ли предел последовательности $x_n = \frac{1}{f(n^2)+1}$, где $f(n)$ — количество пятерок в десятичной записи числа n?

7. (2) Найдите все частичные пределы последовательности $\sin(\sqrt{10}\pi n^{2/3})$.

Дополнительные простые задачи ко второму домашнему заданию

.

8. Найдите $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, если:

$$\text{А) (1) } x_n = \frac{\ln(n^2 - n + 1)}{\ln(n^{10} + n + 1)}; \qquad \text{Б) (1) } x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}; \qquad \text{В) (2) } x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

9. Для последовательностей x_n и y_n докажите неравенства:

а) (1) если одна из последовательностей ограничена

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n + \varlimsup_{n\to+\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} x_n + \varlimsup_{n\to+\infty} y_n;$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n + \varliminf_{n\to+\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} x_n + \varlimsup_{n\to+\infty} y_n;$$

б) (1) если последовательности неотрицательны и ограничены, то

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} (x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} y_n.$$
$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to+\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} (x_n y_n) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} y_n.$$

10. (1) Последовательность x_n задана рекуррентным соотношение : $x_1 = 0$, $x_{2k} = \dfrac{x_{2k-1}}{2}$, $x_{2k+1} = 1 + x_{2k}$. Найдите нижний и верхний пределы x_n.

Дополнительные задачи ко второму домашнему заданию

.

11. (1) Вычислите предел:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\ldots\sqrt[n]{n}}{n}.$$

12. (1) Найти предел:
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1), \quad a > 0.$$

Универсальные дополнительные задачи

.

13. а) (1) Найдите предел последовательности
$$z_n = \frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots n^k}{n^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
б) (2) Вычислите предел
$$\lim_{n\to+\infty} n\left(z_n - \frac{1}{k+1}\right).$$

14. Найти пределы последовательностей

а) (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p \sin(\pi(\sqrt{2}+1)^n), \quad p \in \mathbb{R};$

б) (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin(2\pi e n!)$.

15. (3) Докажите, что $1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \ldots \dfrac{(-1)^n}{n!}$ сходится к e^{-1}.

16. Рассмотрим три последовательности:
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!}, \qquad z_n = 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}.$$
Первые две последовательности, как известно, сходятся к e.

а) (2) Докажите, что последовательность z_n тоже сходится к e.

б) (3) Докажите, что последовательности z_n приближает e лучше, чем y_n, а x_n — хуже. Более формально: проверьте, что существует такое N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство
$$|e - z_n| < |e - y_n| < |e - x_n|.$$

17. (2) Докажите, что для положительной последовательности $\{x_n\}$ выполнены неравенства
$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$