Домашнее задание №12

Группа 504

Количество баллов на зачёт: **7**.

1. (1,5) Доказать, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subseteq V(G)$ выполняется неравенство $|S| \leqslant |N(S)|$. Предъявить бесконечное семейство графов, для которых данное свойство выполняется, а совершенное паросочетание при этом отсутствует.

2. (1,5) Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ степень любой вершины $x \in X$ больше или равна степени любой вершины $y \in Y$. Доказать, что в $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание.

3. (2) Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание. Доказать, что количество рёбер в $G[X, Y]$, которые не принадлежат ни одному X-насыщенному паросочетанию, не превосходит $\binom{|X|}{2}$. Показать, что эта оценка достигается при любом значении $|X|$.

4. (1,5) Доказать теорему Холла, используя теорему Кёнига-Эгервари.

5. (1,5) В двудольном графе $G[X, Y]$ обозначим через def(S), $S \subseteq X$, разность между $|S|$ и $|N(S)|$. По определению положим $\mathrm{def}(\emptyset) = 0$. Доказать, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует паросочетание M, состоящее хотя бы из $|X| - d$ ребер, где $d := \max_{S \subseteq X} \mathrm{def}(\mathrm{S})$.

6. (1,5) Доказать теорему Кёнига-Эгервари с помощью сформулированного в упражнении 5 утверждения.

7. (1) Рассмотрим прямоугольную матрицу A, состоящую из нулей и единиц. Пусть l есть максимальное количество единиц, которые можно выбрать так, чтобы никакие две из них не принадлежали одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы A, а k равно минимальному количеству строк и (или) столбцов, содержащих все единицы матрицы A. К примеру, в матрице
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
существуют $l = 2$ единицы, обведенные в квадратную рамочку, которые не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы A. Далее, существует $k = 2$ строки, которые содержат все единицы матрицы A. Доказать справедливость равенства $l = k$ в общем случае.

   Лемма. *Матрицей P перестановок называется квадратная бинарная матрица, в которой ровно одна единица стоит в каждой строке и в каждом столбце. Любая такая матрица является, по сути, матричным представлением некоторой перестановки σ. Доказать, что любая квадратная матрица $n \times n$, состоящая из неотрицательных целых чисел, выражается в виде суммы k матриц перестановок тогда и только тогда, когда сумма чисел в любой строке, а также сумма чисел в любом столбце равны k.*

   Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно — если A есть сумма k матриц перестановок P_i, $i = 1, \ldots, k$, то каждая такая матрица дает вклад, равный единице, в сумму элементов каждой строки и каждого столбца. Для доказательства обратного утверждения будем действовать индукцией по k. База индукции $k = 1$ верна — в этом случае $A = P$ — матрице перестановок.

В случае $k > 1$ построим двудольный граф $G[X, Y]$ с блоками $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, и соединим x_i с y_j ребрами в количестве, равном $a_{i,j}$. Так как такой граф является k-регулярным, то, на основании упражнения 3 из класса, в нем имеется совершенное паросочетание M. Для любого ребра $\{x_i, y_j\} \in M$ положим $b_{i,j} = 1$, и $b_{i,j} = 0$ в противном случае. Матрица B, составленная из элементов $b_{i,j}$, является матрицей перестановок. Вычитая из A матрицу B, получим матрицу A', сумма элементов в любой строке и в любом столбце которой равна $k - 1$. По индукционному предположению, она раскладывается в сумму $k - 1$ матриц перестановок. Добавляя к ним B, получим требуемое разложение матрицы A. $\square$

8. (1,5) Дважды стохастической матрицей Q называется вещественная неотрицательная матрица, в которой сумма чисел в любой строке и сумма чисел в любой строке равняется единице. Доказать, что любая такая матрица Q представима в виде линейной комбинации

$$Q = c_1 \cdot P_1 + \ldots + c_m \cdot P_m,$$

где P_i — матрицы перестановок, c_i — вещественные неотрицательные числа, сумма которых равна единице.