Практика по алгоритмам у бакалавров

Сергей Копелиович, Всеволод Опарин

Группа Опарина, Осень, 2014

1 Практика 1. Суммы, циклы

1.1 Теория

Арифметическая прогрессия

- $\sum\limits_{n=a}^{b} n = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$
- $\sum\limits_{n=1}^{a} n = \frac{a(a+1)}{2}$

Геометрическая прогрессия

- $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
- При $-1 < q < 1$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$
- Если $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$: $1 - q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx \varepsilon \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^{-k} \approx \frac{1}{\varepsilon}$

Сумма гармонического ряда

- $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor \ge \frac{1}{1} + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}^{1} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^{1} + \overbrace{\frac{1}{8} + \dots}^{1\dots} \ge \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \ge \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \dots \ge 1 + \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$

Про интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$
- Пример: $\ln'(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$
- $\int\limits_a^b \left[\min\limits_{y\in[a..b]} f(y)\right]dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \left[\max\limits_{y\in[a..b]} f(y)\right]dx$
- Для монотонно убывающей $f(x)$ имеем $f(a) \ge \int\limits_a^{a+1} f(x)dx \ge f(a+1)$.
- Для монотонно возрастающей $f(x)$ имеем $f(a) \le \int\limits_a^{a+1} f(x)dx \le f(a+1)$.
- Пусть $X(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, значит, $X(n) - \frac{1}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \ge \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n \ge \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = X(n) - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \le X(n) \le \ln n + 1 \Rightarrow X(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

1.2 Класс

Задачи про суммы

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k}$
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$
4. $\prod\limits_{k=2}^{n} (1 - k^{-2})$
5. $\prod\limits_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k)$

Задачи про циклы for. Во всех задачах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

1. Найти такие a, b, c: $abc = N$, $a + b + c = \min$. Решение:

```
for (a = 1; a <= N; a++)
    for (b = 1; a * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```

2. Поиск делителей без деления

```
b = N;
for (a = 1; a * a <= N; a++) {
    while (a * b > N)
        b--;
    if (a * b == N)
        printf("%d %d\n", a, b);
}
```

3. Еще одно решение задачи (1)

```
for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
    for (b = 1; b * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```

   Получить $\mathcal{O}(N^{5/6})$

4. (*) И еще одно решение задачи (1)

```
for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
    for (b = a; a * b * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```

   Получить $\mathcal{O}(N^{2/3})$

1.3 Домашнее задание

Дедлайн: 15 сентября, 23.59

Задачи на цикл for. Оцените время работы.

1. Про строки

```
for (a = 1; a < n; a++)
    for (b = 0; b < n; b += a)
        ;
```

2. Partition

```
a = 1, b = n;
while (a < b) {
    while (x[a] < M && a <= b) a++;
    while (x[b] > M && a <= b) b--;
    if (a <= b) swap(x[a++], x[b--]);
}
```

Дополнительный вопрос: что делает этот код?

3. Логарифмы

```
while (a >= 2)
    a = sqrt(a);
```

Дополнительный вопрос: а если бы вместо 2 было бы 1?

4. Решето Эратосфена

```
for (p = 2; p < n; p++)
    if (min_divisor[p] == 0) // is prime
        for (x = p + p; x < n; x += p)
            if (min_divisor[x] == 0)
                min_divisor[x] = p;
```

(*) Доказать $\mathcal{O}(N \log\log N)$ (пользуемся не доказанным фактом: $p_n \approx n \ln n$)

5. Перестановки и циклы

```
for (i = 0; i < n; i++)
    if (used[i] == 0)
        for (j = i; used[j] == 0; j = (j*17+2) % n)
            used[j] = 1;
```

Суммы

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

3. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} = \mathcal{O}(1)$

2 Практика 2. Элементарные структуры данных

2.1 Класс

1. Дана послеодвательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и число S. Все числа положительные целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Врямя – $O(n)$.

2. Дана послеодвательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Все числа целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^{r} a_i$ максимальна. Врямя – $O(n)$.

3. Дана последовательность чисел: $x_1 = a,\ x_{i+1} = f(x_i)$, найти с $O(1)$ дополнительной памяти длину периода T и предпериода L за время $\mathcal{O}(L+T)$.

4. Частичные суммы:

   (a) Много раз сделать `+=` на отрезке, в конце один раз вывести массив.

   (b) Сперва много раз `+=` на отрезке, затем много раз "сумма на отрезке".

   (c) В каждой целой точке x числовой прямой есть $f[x]$, изначально равная нулю. Те же запросы, что и в предыдущем пункте. Координаты запросов целые от 0 до 10^{18}.

2.2 Домашнее задание

Дедлайн: 22 сентября, 23.59

1. Задачи на стек.

   (a) В массиве найти для каждого элемента ближайший меньший среди соседей слева и справа за $O(n)$.

   (b) В последовательности $a_1, a_2, \cdots, a_n$ найти подотрезок, на котором максимизируется значение $(r - l + 1) \cdot \min_{i \in [l,r]} a_i$, за $O(n)$.

   (c) Дана матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $O(n^2)$.

2. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное **И** максимальное за $3n-2$ сравнения.

3. Для этих задач приведите код на C++. Время работы алгоритма должно быть линейно. Множество и мультимножество можно хранить в виде отсортированного массива. Даны два множества A и B в отсортированном виде, за $\mathcal{O}(|A| + |B|)$ построить в таком же виде их

   (a) пересечение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$.

(b) разность. Пример: $\{1,2,3\} \setminus \{2,4\} = \{1,3\}$.

(c) объединение. Пример: $\{1,2,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$.

P.S. Если вы пишете в LaTeX, попробуйте заодно пакет `\usepackage{minted}`. В `dropbox` Сережи Копелиовича есть пример. За подробной справкой можно обращаться к нему и Диме Лапшину.

3 Практика 3. Сортировки

3.1 Класс

1. Даны два массива a и b длины n, сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в сортированном порядке.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

   (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

2. В свободное время Анка-пулеметчица любит сортировать патроны по серийным номера. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке. Но тут Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на k. Всего патронов n. Помогите Анке отсортировать патроны.

   (a) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.

   (b) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n + I)$, где I — число инверсий.

   (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.

   (d) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$.

3. Дан массив из $n+1$ целого числа от 1 до n. Массив доступен только на чтение, есть $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти. Найти за $\mathcal{O}(n)$ любое число, которое встречается хотя бы два раза.

4. Дано n точек на плоскости. Соединить их

   (a) $(n-1)$–звенной ломаной без самопересечений (не замкнутой);

   (b) n–звенной ломаной без самопересечений (замкнутой)

   за $\mathcal{O}(n \log n)$.

5. Дан набор из N отрезков $[a_i, b_i]$. Числа a_i, b_i — вещественные.

   (a) Найти такое вещественное x, что $|\{i \colon x \in [a_i, b_i]\}|$ максимально.

   (b) Длину объединения отрезков.

   (c) Для каждого k посчитать, сколько точек на прямой покрыто ровно k отрезками.

6. Даны два массива из положительных чисел a и b. $|a| = |b|$.
   Выбрать массив p: k различных чисел от 1 до n так, чтобы:

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_{p_i} b_{p_i} \to \max$.

(b) $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{p_i}}{\sum_{i=1}^{n} b_{p_i}} \to \max$.

(c) $(\sum_{i=1}^{n} a_{p_i})(\sum_{i=1}^{n} b_{p_i}) \to \max$.

3.2 Домашнее задание

Дедлайн: 29 сентября, 23.59

1. Даны два массива a и b одинаковой длины.
   Нужно найти такую перестановку p, что $\sum_{i=1}^{n} a_{p_i} b_i \to \max$. Решение обосновать.

2. Рассмотрим бинарную кучу, у которой дерево необязательно сбалансированно. Пусть $d(v)$ – расстояние вниз от вершины v до ближайшего листа, а $size(v)$ – число вершин в поддереве с корнем в вершине v.

   Куча называется левацкой, если $\forall v\colon d(l[v]) \geq d(r[v])$.

   (a) докажите, что $size(v) \geq 2^{d(v)}$

   (b) напишите быстрый `Merge` для данной кучи, дайте оценку времени работы

3. Дано $2 \cdot n - 1$ коробок с черными и белыми шарами. В i-ой коробке находится w_i белых и b_i черных шаров. Всего в коробках находится W белых и B черных шаров. Требуется выбрать n коробок, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а черных не менее $\frac{B}{2}$. Решить за $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. На прямой расположено n точек $p_1, p_2, \cdots, p_n$ в порядке возрастания. Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Требуется найти такую точку q, что $\sum_i w_i \cdot |p_i - q|$ имела бы минималь1ное значение. Время работы: $O(n)$.

   Примечание. Точки на вход подаются в порядке возрастания.

4 Практика 4. Куча и медиана

4.1 Класс

1. Пусть есть структура данных, реализующая интерфейс `PriorityQueue` (`Add`, `DeleteMin`). Как расширить эту структуру данных операциями `Build`, `Delete`, `DecreaseKey`, `Merge`?

2. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков n. Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Пирожки можно менять местами. Память у робота маленькая, $O(\log n)$ бит. Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.

3. Найти отрезок массива, на котором $(\min_{i\in[l,r]} a_i) \cdot \sum_{i\in[l,r]} a_i$ максимально. Время $\mathcal{O}(n)$.

   (a) Все числа положительны.

   (b) Числа целые, 32-битные. Решение с использованием минимума на отрезке за $\mathcal{O}(1)$.

   (c) Числа целые, 32-битные. Простое решение.

4. Дана обычная бинарная куча, за сколько можно узнать k-й минимум?

   (a) $\mathcal{O}(k \log n)$

   (b) $\mathcal{O}(k^2)$

   (c) $\mathcal{O}(k \log k)$

5. Оцените число сравнений, которое сделают

   (a) `MergeSort`, если в массиве ровно $n = 2^k$ элементов.

   (b) `HeapSort`, если в массиве ровно $n = 2^k - 1$ элементов.

   (c) `QuickSort`, если в массиве все элементы различны, а выбирается случайный.

   Во всех пунктах нужны точные константы.

4.2 Домашнее задание

Дедлайн: 6 октября, 23.59

Если не успели рассказать. k-ая порядковая статистика в массиве a является k-ым по порядку элементом. Т.е. если массив a отсортировать, то это будет a_k.

Во всех задачах ниже можно считать, что существует процедура поиска k-ой статистики за $O(n)$, где n – длина массива.

1. Медианой называется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-я порядковая статистика. Придумайте структуру данных на основе `heap`, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.

2. Дан массив `A[1..n]` из n различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти k ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.

   (a) По позиции в отсортированном массиве.

   $$d(x, \texttt{median}) = |\texttt{pos}(x) - \texttt{pos}(\texttt{median})|,$$

   где $\texttt{pos}(x)$ — позиция элемента x в отсортированном массиве.

   (b) По значению.

   $$d(x, \texttt{median}) = |x - \texttt{median}|.$$

3. Дано два массива $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и $p_1, p_2, \ldots p_m$. Второй массив отсортирован. Нужно за $\mathcal{O}(n \log m)$ для каждого i найти p_i-ую порядковую статистику в массиве a.

5 Практика 5. Вероятности и бин. поиск

5.1 Класс

1. Пусть X – число выпадений орла после n бросаний фальшивой монетки. Докажите, что $\mathbf{D}[\, X \,] = npq$.

5.2 Домашнее задание

Дедлайн: 13 октября, 23.59

1. Бинарный поиск на массиве

   (a) Выразить `upper_bound` для целых чисел через `lower_bound`.

   (b) Докажите, что нельзя сделать и `lower_bound`, и `upper_bound` одновременно, используя в худшем случае меньше чем $2\log_2 n + \mathcal{O}(1)$ сравнений?

   (c) Сделать предподсчет за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы за $\mathcal{O}(\log n)$ отвечать на запрос "сколько раз число x встречается на отрезке $[l..r]$"?

2. Под $\mathbb{F}_2$ будем подразумевать поле из двух элементов: 0 и 1. Определим для них операции сложения и умножения как обычные по модулю 2. Например, $1 + 1 = 0$. $\mathbb{F}_2^n$ – это вектор размерности n над полем $\mathbb{F}_2$.

   Определим $U(S)$ как равномерное распределение над множеством S. Т.е. каждый элемент S может выпасть с вероятностью $\frac{1}{|S|}$.

   (a) Докажите для любого ненулевого $a \in \mathbb{F}_2^n$ что

   $$\mathop{\mathbf{Pr}}_{x \leftarrow U(\mathbb{F}_2^n)}[\, a \cdot x = 0 \,] = \frac{1}{2}$$

   Примечание. $a \cdot x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$ по модулю 2.

   (b) Даны три матрицы A, B и C размерности $n \times n$ над полем $\mathbb{F}_2$. Постройте алгоритм, который работает $O(n^2)$ и

   - возвращает 1, если $A \cdot B = C$ с вероятностью 1;
   - возвращает 0, если $A \cdot B \neq C$ с вероятностью не меньше $\frac{1}{2}$.

3. Есть три контейнера. В одном из них лежит золотой шар. Оба других пусты. Разрешается открыть только один контейнер. Вы сели на первый попавшийся, и в этот момент открылся второй. Он оказался пуст. Есть ли теперь разница, какой контейнер открывать? Ответ обосновать.

6 Практика 6. Динамика

6.1 Домашнее задание

Дедлайн: 20 октября, 23.59

1. На билете есть $2n$ значный номер. Билет считается счастливым, если сумма первых n цифр совпадает с суммой последних n цифр. По заданому числу n требуется найти число счастливых $2n$ значных билетов за $O(n^2)$. Считать, что стандартные арифметические операции над числами выполняютися за $O(1)$.

2. Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут a_i и время t_i, через которое пират приплывет и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут a и угловая скорость вращения ω. Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну определить порядок уничтожения пиратов за $O(n^2)$, чтобы не допустить непотребства.

3. Дан текст из слов длины $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Порядок слов менять нельзя. Хотим сделать красивый абзац. В красивом абзаце длина каждой строки ровно L (остаток заполняется пробелами). Между каждой парой слов стоит хотя бы один пробел. Обозначим число пробелов в строке i через gap_i. Нужно сделать абзац с минимальным значением $\sum_i gap_i^3$, где сумма пробегается по всем строкам построенного абзаца. Решить за $O(n \cdot L)$.

4. Есть три контейнера. В одном из них лежит золотой шар. Оба других пусты. Разрешается открыть только один контейнер. Вы сели на первый попавшийся. Известно, что в этот момент откроется один из двух других. Если в одном из них есть золотой шар, то второй открывается с вероятностью p. Открылся пустой. Какова вероятность, что в контейнере, на котором вы сидите, есть золотой шар?

   Решить в общем случае, при $p = 1$ и $p = \frac{1}{2}$.

7 Практика 7. Динамика

7.1 Домашнее задание

Дедлайн: 27 октября, 23.59

1. Скобочная последовательность почти правильная, если является префиксом некоторой правильной скобочной последовательности. Найти число почти правильных последовательностей длины n. Решить через динамику за квадрат и написать формулу в явном виде.

2. k-ичная система исчесления – это система, в которой присутствует k цифр. Найдите количество n-значных чисел в k-ичной системе, не содержащих двух нулей подряд за $O(n)$. Можно считать, что ответ считается по модулю маленького простого числа, поэтоу все стандартные арифметические операции выполняются за $O(1)$.

3. Шаблон для строки состоит из символов латинского алфавита, `?` и `*`. Мы говорим, что строка s подходит под шаблон p, если существует каждый `?` в шаблоне можно заменить на букву, а `*` на возможно пустую строку из латинских букв так, что результат будет равен s. Для строки s и шаблона p определите, подходит ли строка под шаблон за $O(|s| \cdot |p|)$.

4. Взвешанный бинарный поиск элемента x. Бинарный поиск взвешенный, если стоимость обращения к i-му элементу массива равна $c_i > 0$. Мы не знаем сам массив, не знаем x, который будем искать, знаем только массив стоимостей c. Нужно за $O(n^3)$ найти стоимость поиска элемента в худшем случае. Внутри бинарного поиска не обязательно сравнивать с серединой, мы сами выбираем элемент, с которым сравнивать.

5. Дана строка s из цифр 0 и 1. Строка свободна от s если не содержит s в качестве подстроки. Требуется найти число строк, свободных от s, длины n из цифр 0 и 1. Можно считать, что ответ считается по модулю маленького простого числа, поэтоу все стандартные арифметические операции выполняются за $O(1)$. Время:

   (a) $O(|s|^3 + |s| \cdot n)$;

   (b) $O(|s| \cdot n)$.

8 Практика 8. Динамика

8.1 Практика

1. Операции с битами

   (a) Дано w-битное число, за $\mathcal{O}(1)$, проверить, является ли число степенью двойки.

   (b) Дано w-битное число, за $\mathcal{O}(1)$, проверить, правда ли, что в битовой записи никакие две единицы не идут подряд.

   (c) Дано w-битное число, за $\mathcal{O}(\log w)$ найти старший единичный бит.

   (d) Дано w-битное число, за $\mathcal{O}(\log w)$ посчитать количество единичных бит.

   (e) Дано w-битное число, найти младший единичный бит быстрее чем $\mathcal{O}(w)$.

2. Задачи про паросочетания в произвольном графе

   (a) Посчитать количество паросочетаний

   (b) Найти максимальное по весу паросочетание

8.2 Домашнее задание

Дедлайн: 10 ноября, 23.59

1. Для каждого множества вершин в графе посчитать количество независимых подмножеств. a) $O(3^n)$; b) $O(2^n \cdot n)$; c) $O(2^n)$.

2. Дан двудольный граф, в первой доли $m \leq 15$ вершин, во второй $n \leq 1000$ вершин. Предложите алгоритм, который считает количество паросочетаний, покрывающих все m вершин первой доли.

3. Дан неориентированный граф. Посчитать за $O^*(2^n)$ количество способов все вершины графа разбить на циклы. Каждая вершина должна лежать ровно в одном цикле. Разбиения на циклы различны, если различны множества использованных ребер. (O^* – это как O, только вместо константы может быть полином).

4. Васе дали кость на d граней. На гранях написаны числа от 1 до d. Каждая грань выпадает равновероятно. Вася может кинуть кость не более n раз. Выигрыш Васи – результат последнего броска. Вася желает выиграть как можно больше. Найти мат. ожидание выигрыша, если Вася играет оптимально. Время $O(n)$.

9 Практика 9. Поиск в глубину

9.1 Практика

1. Дан граф $G = \langle V, E \rangle$ и два множества вершин A и B. За $O(V + E)$ проверить, есть ли путь из какой-нибудь вершины $a \in A$ в какую-нибудь вершину $b \in B$.

2. Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ и два множества вершин $A, B \subseteq V$. Найти путь из A в B такой, что вес максимального ребра пути минимален за $O((V + E) \log E)$.

3. Дан граф $G = \langle V, E \rangle$. Найти цикл через данное ребро $e \in E$ за $O(E)$.

4. Дан граф $G = \langle V, E \rangle$. Найти цикл через данную вершину $v \in V$ за $O(E)$.

5. Найти цикл в неориентированом графе $G = \langle V, E \rangle$ за $O(V)$.

6. Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Требуется ориентировать его ребра так, чтобы он стал сильно связным.

7. Дан связный граф $G = \langle V, E \rangle$. Требуется добавить в него минимальное число ребер, чтобы он стал эйлеровым (содержал эйлеров цикл $\setminus$ путь).

8. Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Требуется покрыть его ребра реберно-непересекающимися путями. Найти покрытие с минимальным числом таких путей.

9. Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Требуется найти в нем T циклов так, чтобы каждый цикл содержал уникальное ребро. T должно быть максимальным.

9.2 Домашнее задание

Дедлайн: 17 ноября, 23.59

1. Разбить множество вершин связного графа на две доли так, чтобы у каждой вершины был сосед в другой доли.

2. Есть комнаты и двери между комнатами. Нужно каждую дверь покрасить с одной стороны в зеленый цвет, с другой в оранжевый цвет так, чтобы для каждой комнаты количества зеленых и оранжевых дверей отличались не более чем на один. $O(V + E)$.

3. Найти гамильтонов цикл на графе бинарных строк длины n. Ребро между строками есть, если $n - 1$-суффикс первой совпадает с $n - 1$-префиксом второй.

4. У каждой вершины не более 3 врагов. Разбить на 2 доли так, чтобы с вершиной в долю попало не более 1 врага. $O(V + E)$.

5. Дан связный 2^k-регулярный граф (все степени равны 2^k). Нужно разбить все его ребра на паросочетания за $O(kE)$.

10 Практика 10. Поиск в ширину

10.1 Практика

1. Постройте граф с отрицательными весами, на котором Деикстра выдавал бы неверный ответ. Граф не должен содержать отрицательных циклов. Где в доказательстве используется положительность весов ребер?

2. Дан неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ и выделенное ребро e. Требуется найти кратчайший простой цикл с этим ребром за $O(V + E)$.

3. Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенной вершиной s. Требуется определить для каждой вершины, сколько до нее один кратчайших путей по модулю маленького простого числа $O((V + E) \cdot \log V)$.

4. Дан взвешенный ориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенной вершиной $s \in V$. Требуется построить дерево "кратчайших" путей из вершины s во все остальные по следующим метрикам. Вес пути определяется весом самого тяжелого ребра. Время – $O((V + E) \log V)$.

10.2 Домашнее задание

Дедлайн: 24 ноября, 23.59

1. Дан взвешенный ориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$, вершина $s \in V$ и дерево $T = \langle V, E' \subseteq E \rangle$. Постройте алгоритм, который проверяет, является ли дерево T – деревом кратчайших путей из вершины s за $O(V + E)$.

2. Рассмотрим взвешенный ориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенной стартовой вершиной s. Пусть ребра, исходящие из s, могут иметь отрицательный вес. Остальные ребра имеют только положительный вес. Граф не содержит отрицательных циклов. Может ли алгоритм Деикстры сломаться на таком графе? Ответ докажите.

3. Дан взвешенный ориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ с выделенными вершинами s и t. Пусть вес пути определяется суммой весов самого тяжелого ребра и следующего за ним по весу.Требуется найти самый легкий путь между вершинами s и t за $O((V + E) \log V)$.

4. Дан набор степеней $d_1, d_2, \cdots, d_n$. Требуется построить граф $G = \langle V, E \rangle$, чтобы степень вершины v_i была равна d_i, или сказать, что такого не существует. Граф не должен содержать петли и кратные ребра. Решить за а) $O(poly(V, E))$; б) $O(V + E)$.

11 Практика 11. Кратчайшие пути

11.1 Практика

1. За $O(n+m)$ найти в неорграфе цикл нечетной длины.

2. Есть ориентированный граф. Для каждой пары вершин a, b определена функция расстояния $f(a,b)$. Вася и Петя стоят в вершинах v и p, соответственно, и хотят поменяться местам, не оказываясь ни в какой момент времени ближе чем на расстоянии D. За какое минимальное число ходов они могут это сделать? Ход – один из них переходит в смежную вершину. $O(nm)$.

3. Дан взвешенный орграф с положительными весами. Найти кратчайший путь, проходящий по всем $k \leq 10$ выделенным вершинам.

4. В графе почти все ребра имеют неотрицательные веса. Все кроме ребер смежных с s, t, x (какая-то третья вершина). Найдите кратчайший путь из s в t за $O(m \log n)$.

5. Даны две паралелльных прямых (река). В реке есть n островов (точек). Нужно провести по реке круглый корабль максимального радиуса R так, чтобы он не задел ни одного осторова. Найти R за $O(n^2)$.

6. Нужно научиться на запрос "уменьшился вес ребра" за $O(n^2)$ пересчитывать матрицу расстояний.

7. Есть n валют и m обменников. i-й обменник предлагает менять валюту a_i на валюту b_i по курсу $\frac{c_i}{d_i}$. Можно ли, используя сколь угодно большие начальные сбережения и данные m обменников, сломать финансовую систему и бесконечно обогащаться? Считается, что у обменников есть бесконечное количество денег целевой валюты. $O(n \cdot m)$.

11.2 Домашнее задание

Дедлайн: 1 декабря, 23.59

1. Есть орграф, на ребрах этого орграфа написаны пары целых положительных чисел (a, b). Нужно найти путь P из s в t такой, что $\sum_{e \in P} a_e \leq A$, а $\sum_{e \in P} b_e \to \min$. Решение за $O(n + m \cdot A)$.

2. Неорграф. Нужно за $O(n^2)$ обрабатывать запросы добавления и удаления ребер. Гарантируется, что граф всегда остается ацикличным. Также нужно за $O(1)$ отвечать на запрос "есть ли путь из a в b"?

3. Предподсчет за $O(n^3)$ и запрос $\langle a, b, e \rangle$ за $O(1)$ – существует ли кратчайший путь из a в b, проходящий через ребро e.

4. Докажите, что если мы за $T(n)$ умеем пересчитывать матрицу расстояний после удаления одного ребра в орграфе с положительными весами, то мы умеем насчитать матрицу расстояний с нуля за $O(T(n) \cdot \log n)$. Формально: есть алгоритм, который на вход получает орграф, матрицу расстояний, ребро, которое нужно удалить, возвращает новую матрицу расстояний после удаления. Тогда есть алгоритм, который работает не более чем в $\log n$ раз дольше, на вход получает граф, на выход дает матрицу расстояний. Гарантируется, что $T(n) = \Omega(n)$.

12 Практика 12. Минимальные покрывающие деревья

12.1 Практика

1. Дана система неравенств на n переменных. Каждое неравенство имеет вид $x_i - x_j \leq \delta_{ij}$. Всего неравенств m. Найти решение системы или сказать, что его не существует, за $O(nm)$.

2. Пусть все $\delta_{ij} \geq 0$, решить задачу за $o(nm)$.

3. Выбрать в графе независимое множество размера не менее $\lceil \frac{n}{D+1} \rceil$, где n – количество вершин, D – максимальна степень.

4. Проверить, что минимальное по весу остовное дерево единственно. $O(E \log V)$.

5. Дан взвешенный граф $G = \langle V, E \rangle$. Дано минимальное остовное дерево на нем. У ребра e поменяем вес. По графу, остовному дереву, ребру и новому весу найдите новое минимальное остовное дерево за $O(n + m)$.

6. Дан граф без рёбер на n вершинах. Приходят запросы добавить ребро e в режиме online. После каждого добавления говорить, является ли граф двудольным.

12.2 Домашнее задание

Дедлайн: 8 декабря, 23.59

1. В каждой клетке прямой записано число 0 или 1. Поступает информация: четность числа суммы чисел на отрезке $[L_i, R_i]$. Всего запросов m. Найти первый запрос, после которого данные противоречивы.

   (a) Решить за $O(m^2)$.

   (b) Решить за $O(m\alpha(m))$.

2. Бюрократы ставят печати. В компании есть n бюрократов. Сверху спустили поручение выполнить m заданий в заданном порядке. Задания могут быть трех типов.

   - Назначить x начальником y (гарантируется, что у y до этого начальства не было).
   - Поручить x проставить печать на документе i, где i – номер запроса. После этого x передает документ начальнику, тот ставит печать, передает начальнику и т.д. Самый главный начальник ставит печать и скармливает документ шредеру.
   - Узнать, ставил ли x печать на документе i.

   Поскольку все документы порезаны на мелкие кусочки, на вас последняя надежда. Нужно ответить на все запросы за $O(m\alpha(n))$.

3. Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E\rangle$. В графе есть подмножество вершин T, которые мы назовем терминалами. Минимальное дерево Штайнера – это связный подграф графа G минимального веса, содержащий все терминалы. Требуется найти такое дерево.

   (a) Пусть $|T| = 3$, решить за $O(E \log V)$.

   (b) Пусть $|T| = 4$, решить за $O(V^3)$.