

Пятое занятие

Подгруппа 504

1. Сколько различных остовных подграфов и сколько различных индуцированных подграфов может иметь простой связный граф G , построенный на n вершинах и m ребрах?
2. Пусть G есть граф, построенный на $n \geq 2$ вершинах, $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ есть максимальная и минимальная степени вершин в графе G . Доказать или опровергнуть следующие утверждения:
 - а) удаление вершины степени $\Delta(G)$ не может увеличить среднюю степень вершин в графе;
 - б) удаление вершины степени $\delta(G)$ не может уменьшить среднюю степень вершин в графе.
3. Пусть G есть простой граф, все вершины которого имеют степени, большие или равные двум. Доказать, что в таком графе обязательно присутствует подграф, являющийся циклом C .
4. Доказать, что любой простой связный граф $G \neq K_n$, построенный на $n \geq 3$ вершинах, содержит в качестве своего подграфа индуцированный путь P_3 длины 2.

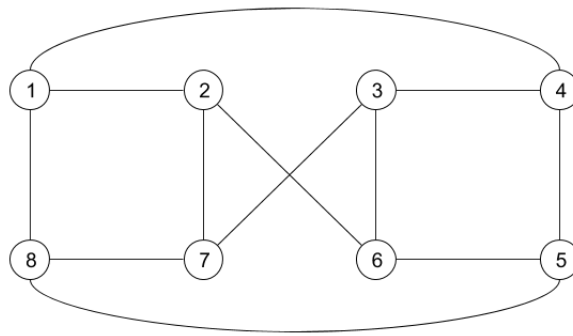


Рис. 1

5. В графе, показанном на рис.1, найти двудольный подграф с максимальным количеством ребер. Доказать, что полученный подграф является максимальным.
6. Пусть в простом графе G с диаметром 2 имеется точка сочленения. Доказать, что в графе \bar{G} найдется изолированная вершина.
7. Пусть G есть k -регулярный двудольный граф, $k \geq 2$. Доказать, что в таком графе мосты отсутствуют.

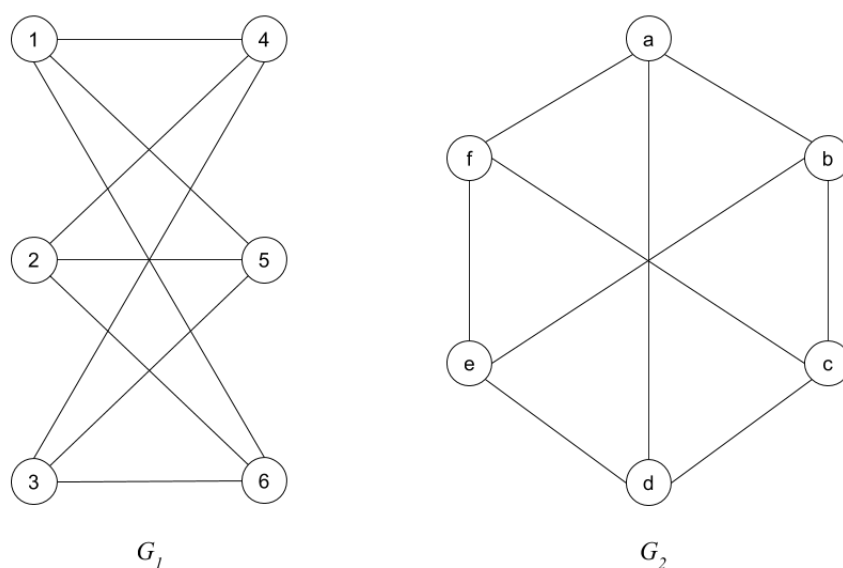


Рис. 2

8. Доказать, что показанные на рис.2 графы G_1 и G_2 изоморфны, построив взаимно-однозначное отображение $\phi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, сохраняющее отношение смежности.
9. Доказать, что графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнения \bar{G} и \bar{H} .
10. Имеется всего два простых связных неизоморфных друг другу графа G_1 и G_2 , степенная последовательность которых имеет вид $(6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Нарисуйте эти графы.
11. Граф G называется самодополненным (self-complementary), если он изоморфен своему дополнению \bar{G} . Привести примеры самодополненных графов, построенных на четырех и пяти вершинах.
12. Доказать, что если граф G , построенный на n вершинах, является самодополненным, то либо n , либо $n - 1$ делится на 4. Построить самодополненный граф на 8 вершинах.
13. Привести пример простого графа на 6 вершинах, группа автоморфизмов которого тривиальна.
14. Построить простой граф, группа автоморфизмов которого изоморфна S_3 .