

# Комбинаторный смысл сложения и умножения производящих функций (ДЗ).

9 мая 2017 г.

1. Доказать, что  $D_n$  есть ближайшее к  $n!e^{-1}$  целое число при  $n \geq 1$ .
2. В футбольной команде  $n$  игроков. Тренер разбивает команду на две группы и просит каждую из групп выстроиться в линию. Затем он первой группе игроков раздает красные футболки. Во второй группе любой из игроков может выбрать футболку одного из трех цветов — оранжевую, белую или зеленую. Сколько существует различных способов совершить все эти действия?
3. Хорошо известно, что любое число можно единственным образом записать в двоичной системе счисления. Дать комбинаторное доказательство данного факта на языке производящих функций.
4. Мы знаем, что при фиксированном параметре  $n$  производящая функция для чисел  $\binom{n}{k}$  равна  $(1+z)^n$ . Чему равна обыкновенная производящая функция для этих чисел  $\binom{n}{k}$  в случае, если мы вместо  $n$  зафиксируем параметр  $k$ ? Можно ли записать для этих чисел экспоненциальную производящую функцию при фиксированном параметре  $k$ ?
5. Поступающий в университет должен сдать четыре различных экзамена. Сколько есть вариантов успешно сдать экзамены и поступить, если проходной балл равен семнадцати?
6. Сколькими способами можно составить вес в 78 грамм, пользуясь восемью гирьками в 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20 и 50 грамм? При этом считается, что гирьки одного веса различаются между собой (например, покрашены в разные цвета).

7. Имеется набор, состоящий из 32 различных карт, 30 из которых разбиты на три группы по десять карт. Каждая группа карт окрашена в свой цвет. Кроме того, внутри каждой группы каждой карте присвоен свой номер от 1 до 10. Две оставшиеся карты в колоде — джокеры двух различных цветов, каждому из которых присвоен номер 0. Вытаскивая карту из колоды, игрок получает  $2^k$  очков, где  $k$  — номер, присвоенный карте. Цель игры состоит в том, чтобы набрать 2004 очка. Сколькими способами это можно сделать?
8. Имеются четыре одинаковые колоды, каждая из которых содержит 52 карты. Мы выбираем из этих колод пять карт. Выборки совпадают, если у нас на руках оказывается пять карт одной масти и одного достоинства. Сколько существует различных выборов, состоящих из пяти карт? Получить ответ как с помощью производящих функций, так и с помощью прямых комбинаторных рассуждений.