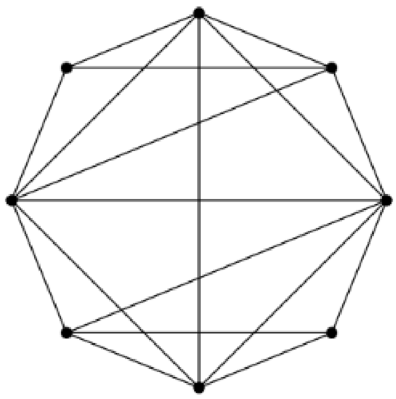
11 Третье занятие

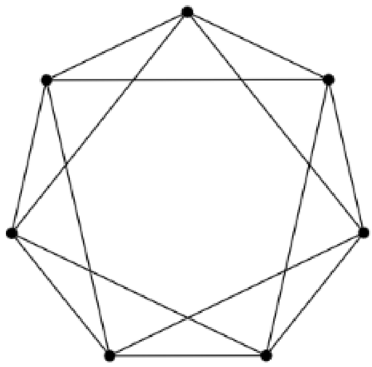
11.1. Задачи на планарные графы. Теорема Эйлера

Пример 11.1. Октаэдр — это один из пяти выпуклых правильных многогранников, имеющий 8 треугольных граней, 12 ребер и 6 вершин степени 4. Доказать, что октаэдр является планарным графом, нарисовав симметричный плоский граф $\widetilde{G}$, описывающий одно из возможных правильных вложений октаэдра в плоскость. Построить двойственный к нему граф $\widetilde{G}^*$. Какому планарному графу G^* он соответствует?

Пример 11.2. Найти минимально возможный 4-регулярный планарный граф.



(a)



(b)

Рис. 14

Пример 11.3. Доказать, что граф G, изображенный на рис.14,a, можно правильно вложить в плоскость, нарисовав для него соответствующий ему плоский граф $\widetilde{G}$.

Пример 11.4. Доказать, что число пересечений 4-регулярного графа G, построенного на семи вершинах (рис.14,b), равно единице.

Пример 11.5. Доказать, что число пересечений полного графа K_6 равно трем.

Пример 11.6. Построить два графа G_1 и G_2 с одной и той же последовательностью степеней вершин вида $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$, один из которых является планарным, а второй таковым не является.

Пример 11.7. Доказать, что любой граф G, содержащий не более чем три цикла, является планарным.

Пример 11.8. Доказать, что плоский граф $\widetilde{G}$ является двудольным тогда и только тогда, когда двойственный к нему граф $\widetilde{G}^*$ является плоским эйлеровым графом.

Пример 11.9. Доказать, что в случае плоского графа, имеющего ровно k связных компонент, формула Эйлера принимает вид

$$n - m + r = k + 1.$$

Пример 11.10. Предположим, что граф G имеет 100 вершин и 300 ребер. Является ли он планарным?

Пример 11.11. Выразить количество m ребер через количество n вершин в произвольном самодвойственном плоском графе, то есть графе, для которого $\widetilde{G} \cong \widetilde{G}^*$.

Пример 11.12. Доказать, что в случае простого планарного двудольного графа G, построенного на n вершинах, количество m ребер ограничено сверху величиной $2n - 4$. Верно ли, что эта же оценка верна для более широкого класса графов? И как использовать эту оценку для доказательства непланарности графа $K_{3,3}$?

Пример 11.13. Доказать равенство $\mathrm{cr}(\mathrm{K}_6) = 3$ с помощью теоремы Эйлера.