DL 6.1. Покажите, что предикат $x = 2$ невыразим в интерпретации $(\mathbb{N}, =, \text{“}x \text{ делит } y\text{”})$.

DL 6.2. Приведите пример замкнутой формулы в сигнатуре $\mathfrak{P} = \{=\}, \mathfrak{F} = \{+, \times, 1\}$, которая истинна в естественной интерпретации на множестве рациональных чисел, но ложна в естественной интерпретации на множестве вещественных чисел.

DL 6.3. Покажите, что предикат «p — n-ое простое число» является выразимым в арифметике.

DL 6.4. Докажите, используя комбинаторный смысл числа сочетаний:
$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

DL 6.5. Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом n-угольнике. Пары считаются неупорядоченными.

DL 6.6. Найдите максимальное число среди $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$.

DL 6.7. Докажите, что:

a) число способов разбить число n на сумму k натуральных слагаемых равно $\binom{n-1}{k-1}$;
b) число способов разбить число n на сумму k целых неотрицательных слагаемых равно $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Порядок слагаемых имеет значение.

DL 5.6. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат S. Интерпретация: носитель — точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикат: A, B, C лежат на одной прямой.

DL 4.2. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \cdots \oplus x_{2n-1}x_{2n}$. Докажите, что:

b) размер любого дерева решений для f не меньше 2^n.

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

DL 4.5. **(Топологическая сортировка)** Докажите, что в ориентированном графе $G(V, E)$ без циклов все вершины можно пронумеровать числами от 1 до $|V|$ таким образом, чтобы рёбра шли из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами.

DL 4.6. Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

$\boxed{\textbf{DL 3.3.}}$ Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.1. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \ldots, 1-x_n) = 1 - f(x_1, \ldots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

$\boxed{\textbf{DL 3.5.}}$ **(Теорема Поста)** Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотоная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \ldots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \ldots, 1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

b) с помощью композиций этих функций можно получить любую булеву функцию;
c) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

$\boxed{\textbf{DL 2.2.}}$ Булева функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется монотонной, если при $x \leqslant y$ выполняется $f(x) \leqslant f(y)$ ($x \leqslant y$, если для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $x_i \leqslant y_i$). Докажите, что:

b) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.

$\boxed{\textbf{DL 2.7.}}$ Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.