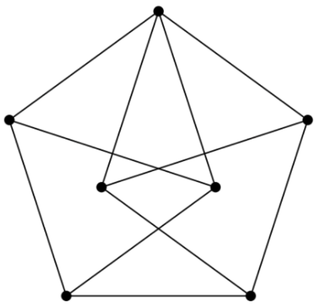
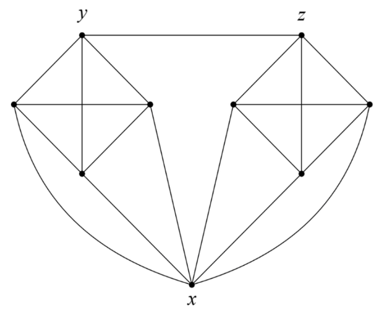
Четырнадцатое занятие

1. Сосчитать хроматическое число $\chi(G)$, кликовое число $\omega(G)$ и число независимости $\alpha(G)$ для графа, изображенного на рис. 1a

2. Определить хроматическое число графа G, показанного на рис. 1b



(a)



(b)

Рис. 1

3. Доказать, что хроматическое число $\chi(G)$ любого связного графа G равно максимальному из хроматических чисел его блоков.

4. Доказать, что в графе G с $|E(G)| = m$ ребрами хроматическое число удовлетворяет неравенству
$$\chi(G) \cdot (\chi(G) - 1) \leq 2m.$$

5. Рассмотрим множество прямых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Образуем граф G, вершинами которого будут являться точки пересечения этих прямых, а ребрами — отрезки, соединяющие две соседние точки пересечения на одной прямой. Доказать, что $\chi(G) \leq 3$.

6. Доказать, что для графа G, в котором любая пара нечетных циклов пересекается хотя бы по одной вершине, хроматическое число $\chi(G) \leq 5$.

7. Доказать, что для любой правильной окраски графа G с $\chi(G) = k$ в k цветов для любого цвета i найдется вершина x, окрашенная в этот цвет, которая смежна с вершинами, окрашенными во все оставшиеся $k - 1$ цветов.

8. Использовать результаты упражнения 7 для доказательства того, что граф G_{k+1}, описанный в теореме Мицельского, нельзя окрасить в k цветов.

9. Доказать, что любой граф G, построенный на n вершинах и не содержащий клики размера $k + 1$, имеет как максимум $(1 - 1/k)n^2/2$ ребер.