

DL 4.1. Докажите, что глубина любого дерева решений для функции $\text{OR}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ не меньше n .

DL 4.2. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \dots \oplus x_{2n-1}x_{2n}$. Докажите, что:

- существует ветвящаяся программа для f размера $O(n)$;
- размер любого дерева решений для f не меньше 2^n .

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S , то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

DL 4.5. (**Топологическая сортировка**) Докажите, что в ориентированном графе $G(V, E)$ без циклов все вершины можно пронумеровать числами от 1 до $|V|$ таким образом, чтобы рёбра шли из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами.

DL 4.6. Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B . Покажите, что если из дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i , выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DL 3.3. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.1. Булева функция называется *самодвойственной*, если выполняется равенство $f(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. Булева функция называется *линейной*, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \pmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

DL 3.5. (**Теорема Поста**) Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотонная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \dots, 1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

- с помощью композиций этих функций можно получить любую булеву функцию;
- если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DL 2.2. Булева функция $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется *монотонной*, если при $x \leq y$ выполняется $f(x) \leq f(y)$ ($x \leq y$, если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $x_i \leq y_i$). Докажите, что:

- монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки \vee и \wedge .

DL 2.5. Пусть формула $\phi \rightarrow \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ , которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \rightarrow \tau$ и $\tau \rightarrow \psi$ являются тавтологиями.

DL 2.6. Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n и их не меньше 2^{n-1} .

DL 2.7. Две формулы, содержащие только переменные и связки \vee , \wedge и \neg , эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду \vee заменить на \wedge и наоборот.