Математическая логика и теория вычислимости Лекция 12. Неразрешимые множества и их свойства

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

24.04.2017

План лекции

1. Последовательность Шпеккера
2. Теорема Успенского-Райса
3. Теорема Клини о неподвижной точке

План лекции

1. Последовательность Шпеккера
2. Теорема Успенского-Райса
3. Теорема Клини о неподвижной точке

Последовательность Шпеккера

- Мы доказали неразрешимость множества

$$W = \{n \mid \langle n \rangle (n) \neq \bot\}$$

- Однако W перечислимо, запустим перечисляющий алгоритм, получим последовательность

$$w_1, w_2, w_3, \ldots$$

Последовательность Шпеккера

- Мы доказали неразрешимость множества

$$W = \{n \mid \langle n \rangle(n) \neq \perp\}$$

- Однако W перечислимо, запустим перечисляющий алгоритм, получим последовательность

$$w_1, w_2, w_3, \ldots$$

- Частичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-w_n}$$

  называют последовательностью Шпеккера (Specker sequence). Ее предел невычислим.
- Придумал Ernst Specker, 1949.

План лекции

Неразрешимые множества

- Напомним примеры неразрешимых множеств

$$W = \{n \mid \langle n \rangle(n) \neq \perp\}$$

$$H = \{(n, x) \mid \langle n \rangle(x) \neq \perp\}$$

- Неразрешимость второго мы доказывали сведением к первому.
- Если бы был разрешающий алгоритм для H, то запуская его на входах (n, n) сделали бы множество W разрешимым.
- Этот метод доказательства неразрешимости можно обобщить.

$\mathfrak{m}$-сведение

- Говорят, что множество A $\mathfrak{m}$-*сводится* к множеству B, нотация $A \leqslant_{m} B$, если существует всюду определенная вычислимая функция f, такая что

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow f(x) \in B)$$

- **Утверждение.** Если $A \leqslant_{m} B$ и B — разрешимо, то A — разрешимо.
- **Утверждение.** Если $A \leqslant_{m} B$ и B — перечислимо, то A — перечислимо.
- **Утверждение.** Сведение транзитивно.
- **Пример.** $W \leqslant_{m} H$. Действительно, в качестве f мы можем взять $n \mapsto (n, n)$. Если бы H было разрешимо, то и W тоже, что неверно.

Алгоритмы, останавливающиеся на нулевом входе

- Рассмотрим
$$H_0 = \{n \mid \langle n \rangle(0) \neq \bot\}$$
- Является ли H_0 неразрашимым?

Алгоритмы, останавливающиеся на нулевом входе

- Рассмотрим
$$H_0 = \{n \mid \langle n \rangle(0) \neq \bot\}$$
- Является ли H_0 неразрашимым? Да.
- Покажем, что
$$H \leqslant_m H_0$$

Алгоритмы, останавливающиеся на нулевом входе

- Рассмотрим
$$H_0 = \{n \mid \langle n \rangle(0) \neq \perp\}$$
- Является ли H_0 неразрашимым? Да.
- Покажем, что
$$H \leqslant_m H_0$$
- В качестве f возьмем $(n, x) \mapsto \sharp A$, где алгоритм A игнорирует свой вход и запускает $\langle n \rangle(x)$.

Алгоритмы, кодирующие тождественный ноль

- Рассмотрим
$$I_0 = \{n \mid \forall x. \langle n \rangle(x) = 0\}$$
- Покажем, что
$$W \leqslant_m I_0$$
- В качестве f возьмем $n \mapsto \sharp A$, где алгоритм A вычисляет $\langle n \rangle(n)$ и возвращает 0.

Эквивалентные алгоритмы

- Два алгоритма A и B называют *эквивалентными*, нотация $A \sim B$, если результат их работы совпадает:

$$\forall x. \quad \begin{aligned} &(A(x) = \bot \to B(x) = \bot) \vee \\ &(A(x) \neq \bot \to B(x) \neq \bot \wedge A(x) = B(x)) \end{aligned}$$

- Эквивалентные алгоритмы задают одну и ту же вычислимую функцию.
- Число шагов может отличаться.

- Два натуральных числа $m, n \in \mathbb{N}$ называют *эквивалентными*, нотация $m \equiv n$, если $\langle m \rangle \sim \langle n \rangle$.
- Множество $S \subset \mathbb{N}$ называют *инвариантным*, если оно вместе с любым своим элементом содержит его класс эквивалентности по отношению $\equiv$.

$$\forall m.\forall n.(m \equiv n) \to (m \in S \land n \in S) \lor (m \notin S \land n \notin S)$$

- **Утверждение.** Если S — инвариантно, то $\mathbb{N} \backslash S$ тоже инвариантно.
- Числовое множество назовем *тривиальным*, если оно пусто или совпадает с $\mathbb{N}$.
- **Теорема (Успенского-Райса).** Если инвариантное множество разрешимо, то оно тривиально.

Доказательство теоремы Успенского-Райса

(От противного). Пусть S — инвариантно, нетривиально, но разрешимо. Рассмотрим два алгоритма L и A со свойствами:

$$\forall x.\ \mathrm{L}(x) = \bot \qquad \exists x.\ A(x) \neq \bot$$

Пусть $\sharp A \in S$, $\sharp \mathrm{L} \in \mathbb{N} \setminus S$. Рассмотрим произвольное неразрешимое перечислимое W и зададим функцию

$$V(n, x) = \begin{cases} A(x), & n \in W, \\ \bot, & n \notin W. \end{cases}$$

V вычислима: полуразрешающий алгоритм для W, потом $A(x)$. Ее сечения $V_n(x)$ вычислимы для любого n; алгоритм определим так

$$V_n = \begin{cases} A, & n \in W, \\ \mathrm{L}, & n \notin W. \end{cases}$$

$$n \in W \leftrightarrow \sharp V_n \in S, \qquad W \leqslant_m S. \quad \blacksquare$$

План лекции

1. Последовательность Шпеккера
2. Теорема Успенского-Райса
3. Теорема Клини о неподвижной точке

Лемма о продолжении

Лемма. Пусть $f : D \to \mathbb{N}$ — вычислимая функция. Тогда существует всюду определенная функция $g(x)$ — продолжение функции $f(x)$ по отношению $\equiv$, то есть для всех $x \in D$:

$$f(x) \equiv g(x)$$

Доказательство. Рассмотрим алгоритм $A(n, x)$ с «кодом»

$$k := f(n)$$
$$\texttt{return}\ \langle k \rangle(x)$$

Рассмотрим его проекции $A_n(x) = A(n, x)$ и положим

$$g(n) = \sharp A_n$$

Эта функция вычислима, всюду определена и эквивалентна f. Действительно, для произвольного y

$$\langle g(n) \rangle(y) = A_n(y) = A(n, y) = \langle f(n) \rangle(y) \quad \blacksquare$$

Теорема Роджерса о неподвижной точке

Теорема Кли́ни (о неподвижной точке). Пусть h — всюду определенная вычислимая функция. Тогда существует такое m, что

$$h(m) \equiv m$$

Доказательство. Пусть $u(n) = \langle n \rangle (n)$, а $g(n)$ — ее $\equiv$-продолжение до всюду определенной функции. Рассмотрим всюду определенную вычислимую

$$t(n) = h(g(n))$$

Докажем, что неподвижная точка $m = g(\sharp t)$:

$$h(m) = h(g(\sharp t)) = t(\sharp t) = u(\sharp t) \equiv g(\sharp t) = m \quad \blacksquare$$

Главная универсальная функция

- У нас имеется вычислимая универсальная функция $U(n, x) = \langle n \rangle(x)$.
- Легко показать, что для любой другой вычислимой $V(n, x)$ верно, что существует всюду определенная вычислимая функция f, такая что

$$V(n, x) = U(f(n), x)$$

- Функции, обладающими подобным свойством, называются *главными* или *гёделевыми*.

Теорема Кли́ни о неподвижной точке

Теорема Кли́ни (о неподвижной точке). Пусть $U(n, x)$ — главная вычислимая универсальная функция, а $V(n, x)$ — произвольная вычислимая функция. Тогда U и V совпадают на некотором сечении $U_p = V_p$, то есть

$$\exists p.\, \forall x.\, U(p, x) = V(p, x)$$

Доказательство. Поскольку U — главная, то для любых n и x верно

$$V(n, x) = U(h(n), x)$$

Берем за p неподвижную точку функции h. ■
В частности, для произвольной вычислимой $V(n, x)$ верно

$$\exists p.\, \forall x.\, \langle p\rangle(x) = V(p, x)$$

Количество неподвижных точек

- Сколько всего у вычислимой функции неподвижных точек?

Количество неподвижных точек

- Сколько всего у вычислимой функции неподвижных точек?
- Бесконечно много.
- Если бы была одна, мы могли бы переопределить ее значение в этой точке, не теряя вычислимости.
- То же рассуждение верно для случая конечного числа неподвижных точек.

Другое доказательство теоремы Успенского-Райса

- Пусть множество S инвариантно, нетривиально, но разрешимо.
- Пусть $p \in S$, $q \notin S$.
- Рассмотрим всюду определенную и вычислимую (из-за разрешимости S) функцию

$$h(x) = \begin{cases} q, & x \in S, \\ p, & x \notin S. \end{cases}$$

- Она не имеет неподвижной точки (из-за инвариантности $p \neq q$). Противоречие. ■

Квайны

- Квайн (quine) — программа, которая печатает свой текст.
- Название — в честь американского логика Уилларда Куайна (Willard Quine).
- Такая программа обязательно существует, иначе бы не имело неподвижной точки преобразование:

$$\mathfrak{m} \mapsto \sharp A$$

где алгоритм A игнорирует свой вход и печатает $\langle \mathfrak{m} \rangle$.