

Математическая логика

Практика 3, 4

22/03/2018

Исчисление высказываний

Правила вывода:

Правило введения импликации

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} (\rightarrow \text{intro})$$

Правило удаления импликации (Modus Ponens)

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\rightarrow \text{elim})$$

Правило введения конъюнкции

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\wedge \text{intro})$$

Правила удаления конъюнкции

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\wedge \text{elimI}) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\wedge \text{elimII})$$

Правила введения дизъюнкции

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee \text{introI}) \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee \text{introII})$$

Правило разбора случаев

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} (\text{case analysis})$$

Правило удаления дизъюнкции

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee \text{ elim})$$

Вывод чего угодно из противоречия

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} (\neg \text{ elim})$$

Правило введения отрицания

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} (\neg \text{ intro})$$

Закон снятия двойного отрицания

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A} (\neg \text{ elimII})$$

На всякий случай, некоторые полезные конструкции в лямбда-исчислении и правила их типизации, по соответствию Карри-Говарда:

Множество типов лямбда исчисления:

$$\frac{t \in Var}{t \in Type} \quad \frac{A \in Type \quad B \in Type}{A \rightarrow B \in Type}$$

$$\frac{A \in Type \quad B \in Type}{A \times B \in Type} \quad \frac{A \in Type \quad B \in Type}{A \amalg B \in Type}$$

Множество предтермов лямбда-исчисления (мы используем разные множества для переменных в типах и переменных в термах):

$$\frac{x \in Var'}{x \in Term} \quad \frac{M \in Term \quad N \in Term}{M N \in Term}$$

$$\frac{M \in Term \quad x \in Var'}{\lambda x. M \in Term}$$

$$\frac{M \in Term \quad N \in Term}{(M, N) \in Term}$$

$$\frac{P \in Term}{fst P \in Term} \quad \frac{P \in Term}{snd P \in Term}$$

$$\frac{M \in Term}{inl M \in Term} \quad \frac{M \in Term}{inr M \in Term}$$

$$\frac{E \in Term \quad M \in Term \quad N \in Term}{\mathbf{case} E \mathbf{ of} \{inl x \rightarrow M; inr y \rightarrow N\} \in Term}, x, y \in Var'$$

Правила типизации:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M N : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x. M : A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash (M, N) : A \times B} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash fst P : A} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash snd P : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash inl M : A \amalg B} \quad \frac{\Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash inr N : A \amalg B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : A \amalg B \quad \Gamma, x : A \vdash M : C \quad \Gamma, y : B \vdash N : C}{\Gamma \vdash \mathbf{case} E \mathbf{ of} \{inl x \rightarrow M; inr y \rightarrow N\} : C}$$

Задания:

- Покажите, что следующие правила являются допустимыми в исчислении высказываний:

1. Правило объединения посылок

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

2. Правило расщепления посылок

$$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C}$$

3. Правила

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, A \wedge C \vdash B \wedge C} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, A \vee C \vdash B \vee C}$$

4. Доказательство от противного

$$\frac{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}{\Gamma, A \vdash B}$$

- Докажите, что следующие формулы являются теоремами исчисления высказываний

1. $\vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C$
2. $\vdash (A \vee B) \wedge C \rightarrow A \wedge C \vee B \wedge C$
3. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
4. $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$

Исчисление секвенций

Схема аксиом:

$$A, \Gamma \vdash A, \Delta$$

Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} (\vdash \wedge)$$

Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} (\vee \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} (\vdash \vee)$$

Правила введения импликации в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} (\rightarrow \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} (\vdash \rightarrow)$$

Правила введения отрицания в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} (\vdash \neg)$$

Задания:

- Постройте вывод формулы или контрпример:

1. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
2. $p \rightarrow q \vdash r \vee p \rightarrow r \vee q$

Домашнее задание

1. Покажите, что следующие формулы являются теоремами исчисления высказываний. Напишите вывод этих формул (или дерево вывода, как вам удобно) и лямбда-термы, доказывающие эти формулы:

(a) $(1б.) \vdash A \wedge B \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

(b) $(1б.) \vdash A \wedge C \vee B \wedge C \rightarrow (A \vee B) \wedge C$

(c) $(1б.) \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow A \wedge B \vee C$

(d) $(2б.) \vdash (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow B \rightarrow B$

2. (2б.) Покажите, что закон Де Моргана является теоремой исчисления высказываний

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

3. (2б.) Опишите правила введения и удаления связки \leftrightarrow

4. Постройте вывод формул или приведите контрпример

(a) $(1б.) \vdash (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p$

(b) $(1б.) p \rightarrow q \vdash (p \rightarrow r) \rightarrow q \rightarrow r$

(c) $(2б.) p \leftrightarrow q \vdash (p \wedge r) \leftrightarrow q \wedge r$

5. (3б.) Выведите правила введения, сложения по модулю 2 (\oplus), стрелки Пирса и штриха Шеффера в antecedent и succedent секвенции.