

1 Подсчет остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях

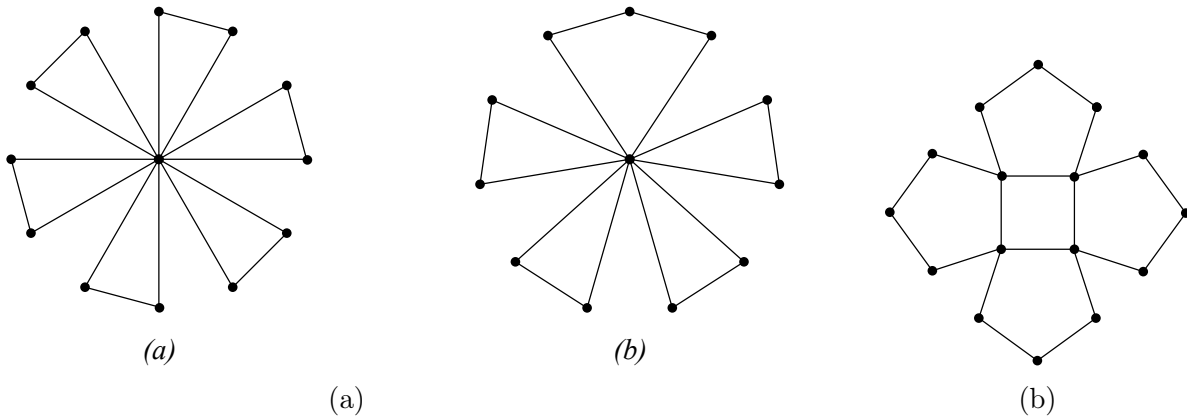


Рис. 1

1.1 (1,5 балла). Без использования рекуррентного соотношения (??) и матричной теоремы о деревьях подсчитать количество остовных деревьев у графов, изображенных на рис.1.

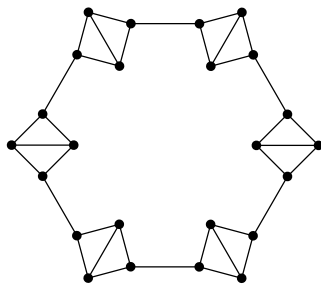


Рис. 2

1.2 (1 балл). Рассмотрим 3-регулярный граф, представляющий собой ожерелье из m графов “воздушный змей” (на рис.2 такой граф показан для случая $m = 6$). Без использования рекуррентного соотношения (??) и матричной теоремы о деревьях подсчитать количество остовных деревьев в таком графе для произвольного значения параметра $m > 1$.

1.3 (0,5 балла). Используя рекуррентное соотношение (??), подсчитать количество остовных деревьев графа $K_{2,3}$.

1.4 (1,5 балла). Подсчитать количество остовных деревьев в графе, изображенном на рис.3, как с использованием рекуррентного соотношения (??), так и с помощью матричной теоремы о деревьях.

1.5 (2 балла). Используя рекуррентное соотношение (??), подсчитать количество остовных деревьев графа G_n “лестница” (рис.4), построенного на $2n$ вершинах и $3n - 2$ ребрах.

1.6 (1,5 балла). Используя рекуррентное соотношение (??), подсчитать количество остовных деревьев графа $K_1 \vee P_n$ “веер” (рис.??), полученного добавлением к P_n вершины, смежной с каждой из вершин пути P_n . Можно ли выразить это количество через числа Фибоначчи?

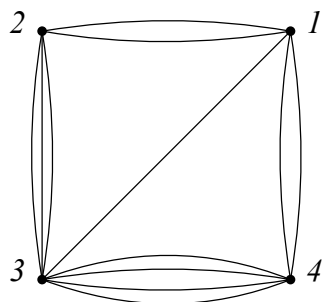


Рис. 3



Рис. 4: Граф G_n

1.7 (1,5 балла). Пусть G есть простой граф, построенный на n вершинах и m ребрах. Предположим, что H_1 есть граф, полученный из G заменой каждого из его ребер на мультиребро кратности k , а H_2 есть граф, полученный из G заменой каждого из его ребер на путь длины k , проходящий через $k-1$ новую вершину. Доказать, что $t(H_1) = k^{n-1} \cdot t(G)$ и $t(H_2) = k^{m-n+1} \cdot t(G)$.

1.8 (1,5 балла). Без использования рекуррентного соотношения (??) и матричной теоремы о деревьях подсчитать количество остовных деревьев графа $K_{2,n}$.

1.9 (2 балла). Подсчитать количество различных непомеченных остовных деревьев графа $K_{2,n}$.

1.10 (1,5 балла). Используя матричную теорему о деревьях, подсчитать количество всех деревьев на n вершинах.