

## Задание 10 (на 20.04).

**СС 53.** Докажите, что язык булевых формул с ровно одним выполняющим набором (USAT):

- а) соNP-трудным;
- б) лежит в P<sup>NP</sup>.

Определим класс UP.  $L \in \text{UP}$ , если существует такая недетерминированная машина Тьюринга  $M$ , что для любого  $x$  выполнено:  $M(x) = L(x)$  и существует не более одной подсказки, которая принимается машиной  $M$ .

**СС 54.** Докажите, что:

- а) язык простых чисел лежит в классе UP;
- б) если  $\text{USAT} \in \text{UP}$ , то  $\text{NP} = \text{coNP}$ .

**СС 55.** Покажите, что существует такой оракул  $A$  и язык  $L \in \text{NP}^A$ , что  $L$  не сводится по Тьюрингу к 3SAT, даже если сведение может использовать оракул  $A$ .

**СС 26.** (подсказка:  $\text{NEXP}^{\text{NP}}$  vs.  $\text{NEXP}$ ) Докажите, что если  $\text{P} = \text{NP}$ , то существует язык из EXP, схемная сложность которого не меньше  $\frac{2^n}{10n}$ .

**СС 40.** Докажите, что если  $\text{NP} \subseteq \text{BPP}$ , то  $\text{NP} = \text{RP}$ .

**СС 44.** Покажите, что:

- а) если  $\text{BPTIME}[f(n)] = \text{BPTIME}[g(n)]$ , то  $\text{BPTIME}[f(h(n))] = \text{BPTIME}[g(h(n))]$ , где  $f, g, h$  — конструктивные по времени,  $f(n), g(n) \geq \log n$ ,  $h(n) \geq n$  — возрастающая функция;
- б)  $\text{DTime}[f(n)] \subseteq \text{BPTIME}[f(n)] \subseteq \text{DTime}[2^{O(f(n))}]$ ;
- в)  $\text{BPP} \subseteq \text{BPTIME}[n^{\log n}] \subsetneq \text{BPTIME}[2^n]$ .

**СС 45.** Определим язык  $\text{QNR} = \{(y, m) \mid y \text{ не является квадратичным вычетом по модулю } m\}$ , докажите, что  $\text{QNR} \in \text{IP}$ .

**СС 46.**  $\text{BPL}_H$  — это класс языков, для которых существует вероятностная машина Тьюринга  $M$ , которая использует логарифмическую память, останавливается с вероятностью 1, и для всех  $x$  выполняется, что  $\text{Pr}[M(x) = L(x)] \geq \frac{2}{3}$ . Покажите, что  $\text{BPL}_H \subseteq \text{P}$ .

**СС 49.** Покажите, что:

- в) если граф представляет собой шахматную доску с выбитыми клетками (вершины — клетки, ребра соединяют соседние клетки), то существует полиномиальный алгоритм, который считает число полных паросочетаний (подсказка: иногда вес ребра удобно взять комплексным).

**СС 51.** Существует вариант класса MA с односторонней ошибкой.  $L \in \text{MA}_1$ , если существует такая полиномиальная вероятностная машина  $V$  и полином  $p$ , что если  $x \in L$ , то найдется такая строка  $y \in \{0, 1\}^{p(n)}$ , что  $\text{Pr}[V(x, y) = 1] = 1$ , а если  $x \notin L$ , то для любой строки  $y \in \{0, 1\}^{p(n)}$  выполняется  $\text{Pr}[V(x, y) = 1] < \frac{1}{3}$ . Покажите, что  $\text{MA} = \text{MA}_1$ .

**СС 52.** Покажите, что  $\text{MA} \subseteq \Sigma_2^P$ .