Принцип Дирихле(ДЗ).

13 сентября 2017 г.

1. Какое максимальное количество королей можно поместить на шахматную доску (стандартного размера, 8×8) так, чтобы эти короли не били друг друга?

2. Внутри единичного квадрата разбросано десять точек. Доказать, что существуют хотя бы две из них, которые расположены ближе, чем 0.48, и хотя бы три из них, которые покрываются кругом, радиус которого равен 0.5.

3. Доказать, что в любом $(n+1)$-элементном подмножестве множества первых $2n$ чисел обязательно найдутся по крайней мере два взаимно-простых числа.

4. Имеется 8 различных положительных целых чисел, меньших или равных 15. Доказать, что среди положительных попарных разностей этих чисел найдутся по крайней мере три одинаковых. Является ли верным похожее утверждение если у нас дано 4 различных числа, меньших или равных 7, и требуется найти по крайней мере две одинаковые разности?

5. Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Доказать, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.

6. Имеется произвольная последовательность $a_1, \ldots, a_n$ целых чисел, не обязательно различных. Доказать, что в такой последовательности обязательно найдется отрезок $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$, сумма элементов которого $\sum_{i=k+1}^{l}$ делится на n.

7. Футбольная команда за сезон отыграла 30 матчей и забила соперникам в совокупности 53 гола. Известно, что в каждой игре ко-

манда забивала хотя бы один гол. Доказать, что существует непрерывная последовательность игр, в течение которой команда забила ровно шесть голов. Останется ли утверждение верным в случае, если команда забьет не 53, а 60 голов?

8. Доказать, что в произвольном $(n + 2)$-м подмножестве множества $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ чисел обязательно найдутся хотя бы два числа, разность которых строго больше n и строго меньше $2n$.