

Теория графов.

14 марта 2017 г.

1. Доказать, что в любом простом графе, построенном на $n \geq 2$ вершинах, существуют по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями. Остается ли верным это утверждение для мультиграфа? Для графа без петель?
2. Рассмотрим произвольную смежную пару вершин $\{x, y\}$ в простом графе G на n вершинах. Доказать, что ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\deg(x) + \deg(y) - n$ треугольникам в графе G .
3. Пусть G есть регулярный простой связный граф, имеющий 22 ребра. Сколько вершин может содержать данный граф (первая теорема, определение)?
4. Рассмотрим невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0.$$

Доказать, что такая последовательность является степенной последовательностью некоторого графа G без петель тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число и выполняется неравенство

$$d_1 \leq d_2 + d_3 + \dots + d_n$$

5. Пусть M_a и M_i есть матрицы смежности и инцидентности простого графа G . Чему равны диагональные коэффициенты матриц M_a^2 и $M_i M_i^t$, где M_i^t — транспонированная к M_i матрица? Как связаны недиагональные элементы матриц $M_i M_i^t$ и M_a ?
6. Доказать, что для произвольного турнира T справедливо равенство

$$\sum_{x \in V(T)} \text{outdeg}(x)^2 = \sum_{x \in V(T)} \text{indeg}(x)^2.$$

7. Орграф D называется сбалансированным, если для любой вершины $x \in V(D)$ выполняется неравенство

$$|\text{outdeg}(x) - \text{indeg}(x)| \leq 1.$$

Доказать, что из любого неориентированного графа G можно получить направленный сбалансированный орграф D .

8. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: если любая вершина графа имеет степень 2, то граф G является циклом (определение).
9. Минимальная степень вершины в графе G , построенном на восьми вершинах, равна четырем. Доказать, что любые две вершины в таком графе G либо являются смежными, либо соединены путем длины 2.
10. Доказать, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.
11. Доказать, что простой граф G , построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.
12. Доказать, что в простом графе с $\Delta = n - 2$ и диаметром 2 количество ребер $m \geq 2n - 4$ (определения).
13. Пусть G есть простой граф, диаметр которого $\text{diam}(G) \geq 3$. Доказать, что его дополнение \bar{G} имеет диаметр $\text{diam}(\bar{G}) \leq 3$ (определения).
14. Пусть G есть простой граф, диаметр которого $\text{diam}(G) > 3$. Доказать, что его дополнение \bar{G} имеет диаметр $\text{diam}(\bar{G}) < 3$. Вывести отсюда, что любой самодополненный граф G имеет диаметр $\text{diam}(G) \leq 3$. Для каждого $k = 0, 1, 2, 3$ привести пример самодополненного графа, имеющего данный диаметр, в случае, если таковой существует (определения).