Теория категорий

Кванторы и импликация

Валерий Исаев

05 мая 2017 г.

План лекции

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Интерпретация теории типов

Классификатор подобъектов

Определение

- Категория называется *когерентной*, если она регулярна, для любого объекта A в порядке подобъектов $Sub(A)$ существуют все конечные копроизведения, и для любого морфизма $f : A \to B$ функтор $f^* : Sub(B) \to Sub(A)$ сохраняет их.
- Эта дополнительная структура – это в точности то, что необходимо для интерпретации ложного утверждения и дизъюнкций.

Дистрибутивность пересечений

Proposition

В когерентной категории пересечении дистрибутивно над объединением подобъектов: $A \cap (B \cup C) \simeq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *и* $A \cap 0 = 0$.

Доказательство.

Функтор $A \cap - : Sub(X) \to Sub(X)$ можно определить как композицию

$$Sub(X) \xrightarrow{f^*} Sub(A) \xrightarrow{\exists_f} Sub(X)$$

где $f : A \to X$ и $\exists_f$ – левый сопряженный к f^*. Функтор f^* сохраняет копроизведения по предположению когерентности, а $\exists_f$ сохраняет копределы как левый сопряженный. $\square$

Начальный объект

Proposition

В когерентной категории существует строгий начальный объект.

Доказательство.

Определим 0 как наименьший подобъект 1. Заметим, что $\pi_1 : X \times 0 \hookrightarrow X$ является наименьшим подобъектом X. Если у нас есть стрелка $X \to 0$, то π_1 является изоморфизмом. Другими словами, он является и наибольшим подобъектом X. Следовательно, у любого такого X ровно один подобъект – он сам. $\square$

Начальный объект

Доказательство.

Докажем, что если есть морфизм $A \to 0$, то A является подобъектом 1. Дествительно, если у нас есть пара стрелок $f, g : B \to A$, то так как у нас есть стрелка $B \to 0$, то уравнитель f и g является изоморфизмом, то есть f и g равны. Следовательно $X \times 0$ изоморфен 0, то есть 0 – строгий. Докажем, что 0 – начальный. Так как у нас есть стрелка из $X \times 0$ в 0, то $X \times 0 \simeq 0$, а значит у нас есть стрелка из 0 в X. Если у нас есть стрелки $f, g : 0 \to X$, то их уравнитель является подобъектом 0, а значит изоморфизмом, то есть f и g равны. $\square$

План лекции

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Интерпретация теории типов

Классификатор подобъектов

Квантор всеобщности

- Правила вывода для $\forall$ дуальны правилам для $\exists$:

$$\frac{\varphi \longmapsto \forall(x : s)\psi}{\varphi \longmapsto \psi} \qquad \frac{\varphi \longmapsto \psi}{\varphi \longmapsto \forall(x : s)\psi}$$

- То есть у нас есть биекция между стрелками $\pi_1^*([\![\varphi]\!]) \to [\![\psi]\!]$ в $Sub(X \times [\![s]\!])$ и $[\![\varphi]\!] \to [\![\forall(x : s)\psi]\!]$ в $Sub(X)$, где $\pi_1 : X \times [\![s]\!] \to X$.
- Таким образом, $[\![\forall(x : s)\psi]\!]$ можно определить как $\forall_{\pi_1}([\![\psi]\!])$, где $\forall_{\pi_1} : Sub(X \times [\![s]\!]) \to Sub(X)$ – правый сопряженный к $\pi_1^* : Sub(X) \to Sub(X \times [\![s]\!])$.

Гейтинговы категории

- Категория называется *гейтинговой*, если она регулярна, у любого объекта существует минимальный подобъект и объединения подобъектов, и для любого морфизма $f : X \to Y$ существует правый сопряженный функтор $\forall_f : Sub(Y) \to Sub(X)$ к функтору $f^* : Sub(Y) \to Sub(X)$.
- Так как гейтингова категория регулярна, то у функтора f^* есть и левый сопряженный. Таким образом, мы получаем цепочку сопряженных функторов:

$$\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$$

- Мы не требуем, чтобы f^* сохранял наименьший подобъект и объединения, так как это следует из того, что он левый сопряженный.

$\forall$ коммутирует с подстановкой

Чтобы доказать, что $\forall$ коммутирует с подстановкой, нам нужно доказать, что для любого пулбэка слева квадрат функторов справа коммутирует с точностью до изоморфизма.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Sub(A) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "\forall_f"'] & Sub(P) \arrow[d, "\forall_k"] \\
Sub(C) \arrow[r, "g^*"'] & Sub(B)
\end{tikzcd}
$$

$\forall$ коммутирует с подстановкой

- Функторы в правом квадрате являются правыми сопряженными к следующим функторам:

$$\begin{tikzcd} Sub(A) & Sub(P) \arrow[l, "\exists_h"'] \\ Sub(C) \arrow[u, "f^*"] & Sub(B) \arrow[l, "\exists_g"] \arrow[u, "k^*"'] \end{tikzcd}$$

- Так как этот квадрат коммутирует по регулярности, то квадрат на предыдущем слайде коммутирует по уникальности правых сопряженных функторов.

Импликация

- Интерпретация импликации определяется так же как интерпретация экспонент.
- То есть $[\![\varphi \to (-)]\!] : Sub(X) \to Sub(X)$ – правый сопряженный к $[\![\varphi \wedge -]\!] = [\![\varphi]\!] \cap -$.
- Так как $A \cap -$ является композицией

$$Sub(X) \xrightarrow{f^*} Sub(A) \xrightarrow{\exists_f} Sub(X)$$

где $f : A \hookrightarrow X$, то правый сопряженный к нему существует в любой гейтинговой категориии.

- Таким образом, мы можем проинтерпретировать $\varphi \to \psi$ как $\forall_{[\![\varphi]\!]}([\![\varphi]\!]^*(\psi))$.
- Так как $\forall_{[\![\varphi]\!]}$ и $[\![\varphi]\!]^*$ коммутируют с подстановкой, то и интерпретация импликации с ней коммутирует.

План лекции

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Интерпретация теории типов

Классификатор подобъектов

Интерпретация зависимых типов

- Утверждения в контексте $x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$ мы интерпретировали как мономорфизмы $X \hookrightarrow [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!]$.
- В теории типов это означает, что если тип B в контексте Γ является утверждением, то мы его интерпретируем как такой мономорфизм.
- Если B – произвольный тип, то он интерпретируется как произвольная стрелка $[\![B]\!] \to [\![\Gamma]\!]$.

Интерпретация Σ и Π

- Σ и Π типы интерпретируются как ∃ и ∀, только вместо категорий подобъектов Γ мы рассматриваем категории всех объектов над Γ.
- Таким образом, эти конструкции будут интерпретироваться через функторы $\Sigma_f, \Pi_f : \mathbf{C}/\Gamma \to \mathbf{C}/\Delta$:

$$\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f$$

  где $f^* : \mathbf{C}/\Delta \to \mathbf{C}/\Gamma$ – пулбэк функтор.
- Σ_f существует всегда, он определяется как $\Sigma_f(g) = f \circ g$.
- Конечно полная категория называется *локально декартово замкнутой*, если Π_f существует для любого морфизма $f : \Gamma \to \Delta$.

Существование Π

Proposition

Категория $\mathbf{C}$ *локально декартово замкнута тогда и только тогда, когда для любого ее объекта* Γ *категория* $\mathbf{C}/\Gamma$ *декартово замкнута.*

Доказательство.

В одну сторону доказательство такое же как для импликаций. Функтор $A \times - : \mathbf{C}/\Gamma \to \mathbf{C}/\Gamma$ равен следующей композиции:

$$\mathbf{C}/\Gamma \xrightarrow{p_A^*} \mathbf{C}/A \xrightarrow{\Sigma_A} \mathbf{C}/\Gamma$$

где $p_A : A \to \Gamma$. Следовательно экспоненту B^A в $\mathbf{C}/\Gamma$ можно определить как $\Pi_A(p_A^*(B))$. $\square$

Существование П

Доказательство.

Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория с конечными пределами. Докажем, что для любого объекта A у функтора $!_A^* : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/A$ есть правый сопряженный $\Pi_A : \mathbf{C}/A \to \mathbf{C}$.

Мы можем определить $\Pi_A(B)$ как объект функций $f : A \to B$, таких что $p_B \circ f = id_A$. Формально, $\Pi_A(B)$ определяется как уравнитель стрелок $[\![\lambda fa.p_B(f(a))]\!], [\![\lambda fa.a]\!] : B^A \to A^A$.

Теперь мы можем закончить доказательство. Если для всех Γ категория $\mathbf{C}/\Gamma$ декартово замкнута, то $\mathbf{C}$ – конечно полна, так как произведения в $\mathbf{C}/\Gamma$ – это пулбэки в $\mathbf{C}$. Более того, существование П следует из доказанного свойства, примененного к категории $\mathbf{C}/\Gamma$. $\square$

Правила вывода для Σ

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B[x := a]}{\Gamma \vdash (a, b) : \Sigma(x : A)\, B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : \Sigma(x : A)\, B}{\Gamma \vdash \pi_1\, p : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \Sigma(x : A)\, B}{\Gamma \vdash \pi_2\, p : B[x := \pi_1\, p]}$$

Термы $\Gamma \vdash a : A$ интерпретируются как сечения морфизма $p_A : [\![A]\!] \to [\![\Gamma]\!]$.
Если $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$ и $[\![b]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![a]\!]^*([\![B]\!])$, то $[\![(a, b)]\!]$ определяется как композиция $[\![b]\!]$ и $[\![a]\!]^*([\![B]\!]) \to [\![B]\!]$.
Если $[\![p]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]$, то $[\![\pi_1\, p]\!] = p_A \circ [\![p]\!]$ и $[\![\pi_2\, p]\!]$ определяется по универсальному свойству пулбэков.

Правила вывода для Π

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\, b : \Pi(x : A)\, B}$$

По сопряженности у нас есть биекция между сечениями $\Pi_{p_A}(\llbracket B \rrbracket) \to \llbracket \Gamma \rrbracket$ и $p_B : \llbracket B \rrbracket \to \llbracket A \rrbracket$. Так как $\llbracket b \rrbracket : \llbracket A \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$ – сечение, то мы можем определить интерпретацию $\lambda x.\, b$ как сечение $\Pi_{p_A}(\llbracket B \rrbracket) \to \llbracket \Gamma \rrbracket$.

$$\frac{\Gamma \vdash f : \Pi(x : A)\, B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f\ a : B[x := a]}$$

Так как $\llbracket f \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \to \Pi_{p_A}(\llbracket B \rrbracket)$ – сечение, то по биекции мы получаем сечение $f' : \llbracket A \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$. Интерпретацию $f\ a$ можно определить по универсальному свойству пулбэков. Для этого нужно построить стрелку $\llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$. Мы определяем ее как композицию $\llbracket a \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \to \llbracket A \rrbracket$ и $f' : \llbracket A \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$.

Проблемы интерпретации

- На самом деле, так определить интерпретацию нельзя, так как не получится доказать лемму о подстановке.
- В отличие от интерпретации кванторов, здесь нам нужно доказывать равенство не подобъектов, а объектов.
- Проблема в том, что у нас нет равенства, есть только изоморфизм.
- Эту проблему можно исправлять различными способами, но мы их рассматривать не будем.

План лекции

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Интерпретация теории типов

Классификатор подобъектов

Интерпретация вселенных

- Нам осталось научиться интерпретировать вселенные.
- Произвольные вселенные нам не пригодятся; мы будем интерпретировать только вселенную утверждений $Prop$.
- Этот тип характеризуется тем, что функции $A \to Prop$ соответствуют подтипам A.

Классификатор подобъектов в **Set**

- В **Set** существует биекция между подмножествами некоторого множества A и предикатами $A \to 2$.
- Если $2 = \{\top, \bot\}$ и $f : A \to 2$, то соответствующее подмножество A можно определить как $f^{-1}(\top)$.
- Эту конструкцию можно переформулировать категориально. Пусть $true : 1 \to 2$ – функция, выбирающая элемент $\top$. Тогда любому морфизму $f : A \to 2$ мы можем сопоставить подобъект A – пулбэк $true$ вдоль f.
- В **Set** эта конструкция взаимно однозначна. В произвольной категории это может быть не верно.

Определение классификатора подобъектов

Definition

Пусть в $\mathbf{C}$ существует терминальный объект 1. Тогда объект Ω вместе с морфизмом $true : 1 \to \Omega$ называется *классификатором подобъектов*, если для любого мономорфизма $f : A' \hookrightarrow A$ существует уникальный морфизм $\chi_f : A \to \Omega$, такой что следующий квадрат является пулбэком:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] & 1 \arrow[d, hook, "true"] \\ A \arrow[r, dashed, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Таким образом, существует биекция между подобъектами A и морфизмами $A \to \Omega$.

Правила вывода для *Prop*

$$\frac{\Gamma \vdash A : Prop}{\Gamma \vdash El(A)\ type}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : Prop}{\Gamma, x : El(A), y : El(A) \vdash x = y}$$

$$\frac{\begin{array}{ll} \Gamma \vdash A : Prop & \Gamma, x : El(A) \vdash b : El(B) \\ \Gamma \vdash B : Prop & \Gamma, y : El(B) \vdash a : El(A) \end{array}}{\Gamma \vdash iso\,(x.\,b)(y.\,a) : A = B}$$

Интерпретация *Prop*

- Определим $[\![Prop]\!]$ как Ω.
- Если $[\![A]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![Prop]\!]$, то $[\![El(A)]\!] = [\![A]\!]^*(true)$.
- Так как у нас есть биекция между морфизмами $X \to \Omega$ и подобъектами X, то имея $[\![A]\!], [\![B]\!] : [\![\Gamma]\!] \to \Omega$ и другие посылки *iso*, мы получаем, что $[\![A]\!]^*(true) = [\![B]\!]^*(true)$ как подобъекты $[\![\Gamma]\!]$. Следовательно, $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.