DL 53. Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DL 54. Докажите, что множество точек разрыва неубывающей функции из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно. (Точка a называется точкой разрыва функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если найдется такая последовательность x_n, стремящаяся к a, что $f(x_n)$ не имеет предела или имеет предел, отличный от $f(a)$.)

DL 55. Докажите, что любое множество непересекающихся восьмерок на плоскости конечно или счетно. Восьмеркой называется объединение двух касающихся окружностей.

DL 56. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно $\mathbb{R}$.

DL 57. Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

DL 58. Докажите, что:

а) в любом графе число вершин нечетной степени четно;

б) если вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета таким образом, что число черных вершин четно, то можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.

DL 59. Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n - k$ ребер, то в нем как минимум k компонент связности.

DL 60. Имеется сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрежается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?

DL 61. Докажите, что:

а) из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным;

б) если в связном графе степени всех вершин не менее двух, то в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

DL 62. В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом остовного дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него. Докажите, что:

а) минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса;

б) каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса;

в) остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.

DL 63. В связном графе степени всех вершин равняются 10. Докажите, что этот граф останется связным, если из него удалить любое ребро.

DL 64. В графе четное число вершин и степени всех вершин четны. Докажите, что число остовных деревьев четно.

DL 32. Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух n-битных чисел размера $O(n^2)$ и глубины $O(\log n)$.

DL 33. Функция голосования $Maj_{2k+1} : \{0,1\}^{2k+1} \to \{0,1\}$ равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы $k+1$ битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера $O(k)$.

DL 39. На множестве $\mathbb{N}$ задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.