Домашнее задание 3 (на 18 октября)

1. (1) Найдите дифференциал функции $f(x,y) = (1+xy)^y$.

2. (1) Найдите все значения α, при которых функция f дифференцируема в точке $(0,0)$, если $f(x,y) = \dfrac{|x|^{3\alpha} + |y|^{7-\alpha}}{x^2+y^2}$ при $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0) = 0$.

3. (1) Докажите, что если $f(u)$ — произвольная дифференцируемая функция, то функция $\varphi(x,y) = xy + xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xy + \varphi$.

4. (1) Найдите единичный вектор $\overrightarrow{l}$, по направлению которого $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ в точке $(3;1)$ достигает наибольшего значения, если $f(x,y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$.

5. (1) Найдите угол между градиентами функции $f = \ln|y/x|$ в точках $A(1/2;1/4)$ и $B(1;-1)$.

6. (3) Для функции $u(x;y;z) = xy^2z^3$ найти производную $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, если

   а) $z(x;y)$; б) $y(x;z)$; — функции, заданные неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

7. (2) Преобразуйте уравнение $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$, принимая за новые переменные $u = \ln x$ и $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

8. (2) Разложите функцию по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) до $o(\rho^2)$ $(\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$:

   a) $f(x,y) = \sin x \sin y, x_0 = y_0 = \pi/4$; b) $g(x,y) = x^y, x_0 = y_0 = 1$.