Производящие функции и линейные рекуррентные соотношения. Числа Каталана.

28 апреля 2017 г.

1. В случае $p = 1$, $q = -2$ числа $U_n(1, -2)$ называются числами Якобшталля (Jacobsthal numbers). Как выглядит формула Кассини для этих чисел? Можно ли получить эту формулу для общего случая $U_n(p, q)$?

2. Решить с помощью обыкновенных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами:
$$a_{n+1} = a_n + 2^n, \qquad a_0 = 0;$$
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \qquad a_0 = a_1 = 1;$$
$$a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = 0.$$

3. Составить рекуррентное соотношение для количества a_n способов замостить доску размером $3\times n$ костяшками домино. Решить это рекуррентное соотношение с помощью обыкновенных производящих функций.

4. Решите с помощью экспоненциальных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения:
$$a_{n+1} = 2(n+1)a_n + (n+1)!, \qquad a_0 = 0,$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n, \qquad a_0 = a_1 = 1,$$
$$a_n = na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2}, \qquad a_0 = a_1 = 1.$$

5. Доказать, что количество путей на плоскости, выходящих из начала координат, приходящих в точку с координатами (n, n), состоящих из отрезков $(0, 1)$ и $(1, 0)$, и не поднимающихся выше диагонали $x = y$, описывается числами Каталана.

6. Установить биекцию между множеством плоских бинарных корневых деревьев, построенных на n вершинах, и множеством правильных скобочных последовательностей длины $2n$, доказав, тем самым, что количество таких деревьев равно числу Каталана C_n.

7. Установить биекцию между всеми триангуляциями выпуклого $(n+2)$-угольника и плоскими корневыми бинарными деревьями, построенными на n вершинах. Изобразить эту биекцию на рисунке для одной из конкретных триангуляций выпуклого шестиугольника.

8. Рассмотрим множество путей, исходящих из точки с координатами $(0, 0)$, приходящих в точку с координатами $(n, 0)$, состоящих из отрезков $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(1, 0)$, и нигде не опускающихся ниже оси абсцисс. Такие пути называются путями Моцкина. Вывести рекуррентное соотношение для подсчета количества M_n всех таких путей.

9. Рассмотрим матрицу M_n вида

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать для этой матрицы характеристический полином $\phi_n(\lambda)$, получить для $\phi_n(\lambda)$ рекуррентное соотношение второго порядка и решить его с помощью обыкновенных производящих функций. Использовать полученный результат для определения собственных чисел матрицы M_n.