

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 8. Исчисление предикатов гильбертовского типа

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

03.04.2017

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте
- 6 Понижение мощности
- 7 Невыразимые предикаты

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте
- 6 Понижение мощности
- 7 Невыразимые предикаты

- Напомним правила построения формул логики предикатов
 - 1 Фиксируется сигнатура, как набор функциональных и предикатных символов заданной арности.
 - 2 Из индивидуальных переменных с помощью функциональных символов строятся термы.
 - 3 Из термов с помощью предикатных символов строятся атомарные формулы.
 - 4 Из атомарных формул с помощью стандартных пропозициональных связок и кванторов получают формулы логики предикатов.
- Можно ли аналогично исчислению высказываний построить исчисление предикатов?
- То есть: задать аксиомы и правила вывода и получить в результате выводимыми все общезначимые формулы и только их?

- Аксиомы, унаследованные от исчисления высказываний:

- 1 $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
- 2 $(\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \chi$
- 3 $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
- 4 $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$
- 5 $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \wedge \psi$
- 6 $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$
- 7 $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$
- 8 $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \varphi \vee \psi \rightarrow \chi$
- 9 $\neg\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \psi$
- 10 $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi$
- 11 $\varphi \vee \neg\varphi$

- Новые аксиомы:

- 12 $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x := \tau)$
- 13 $\varphi(x := \tau) \rightarrow \exists x\varphi$

Требуется, чтобы указанные подстановки были корректными.

- Какие частные случаи аксиом

12 $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x := \tau)$

13 $\varphi(x := \tau) \rightarrow \exists x\varphi$

можно выделить без оговорки о корректности подстановок?

- Всегда можно корректно подставлять константу данной сигнатуры (или, шире, любой терм без переменных).
- Всегда можно корректно подставлять вместо переменной x ее саму, то есть
 - $\forall x\varphi \rightarrow \varphi$
 - $\varphi \rightarrow \exists x\varphi$

являются аксиомами.

- Modus ponens по-прежнему работает

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- Помимо этого имеются еще два *правила Бернайса*

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{\psi \rightarrow \forall x \varphi} \quad (\text{B}\forall)$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi} \quad (\text{B}\exists)$$

Требуется, чтобы переменная x не была свободна в ψ .

- **Утверждение.** Допустимо производное *правило обобщения*:

$$\frac{\varphi}{\forall x\varphi} \quad (\text{Gen})$$

- **Доказательство.** Действительно, возьмём в качестве ψ заведомо выводимую формулу, например какую-либо аксиому с подставленными в нее замкнутыми формулами. Имеем:

1	ψ	Assumption
2	φ	Premise
3	$\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$	A1
4	$\psi \rightarrow \varphi$	MP(2)(3)
5	$\psi \rightarrow \forall x\varphi$	B \forall (4)
6	$\forall x\varphi$	MP(1)(5) ■

- Исчисление высказываний является полным, поэтому мы можем считать выводимым (в ИП) любой частный случай пропозициональной тавтологии.
- Например, выводимы

$$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$$

$$(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \chi)$$

$$(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$$

- Выведем, например, $\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$

$$1 \quad \forall x\varphi \rightarrow \varphi$$

A12

$$2 \quad \varphi \rightarrow \exists x\varphi$$

A13

$$3 \quad (\forall x\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \exists x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$$

[syllogism](#)

$$4 \quad (\varphi \rightarrow \exists x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$$

MP(1)(3)

$$5 \quad \forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$$

MP(2)(4)

- **Утверждение.** Класс выводимых формул не измениться, если использовать (Gen) вместо $(B\forall)$ и $(B\exists)$ в качестве правил вывода, и добавить две дополнительные аксиомы

$$\textcircled{14} \quad \forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$$

$$\textcircled{15} \quad \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$$

(Как обычно, требуется, чтобы x не была свободна в ψ .)

- **Доказательство.** Покажем, например, что $(B\forall)$ допустимо, как производное правило:

1	$\psi \rightarrow \varphi$	Premise
2	$\forall x(\psi \rightarrow \varphi)$	Gen(1)
3	$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$	A14
4	$\psi \rightarrow \forall x\varphi$	MP(2)(3) ■

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления**
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте
- 6 Понижение мощности
- 7 Невыразимые предикаты

- Мы хотим доказать, что всякая формула, выводимая в исчислении предикатов, является общезначимой.
- Для этого мы должны проверить все аксиомы на общезначимость и все правила вывода на сохранение общезначимости.
- Аксиомы (A1-11) тривиально общезначимы.
- Правило Modus ponens сохраняет общезначимость.
- Остаются две новые аксиомы и правила Бернаиса.

- **Лемма 1.** Для произвольных термов u и t и произвольной оценки π верно

$$[u(x := t)]_{\pi} = [u]_{\pi, x := [t]_{\pi}}$$

- **Доказательство.** Индукция по структуре терма.

База:

x – это переменная. Если x , то слева и справа $[t]_{\pi}$. Если не x (скажем y), то слева и справа $\pi(y)$.

Индукционный переход:

тривиально.



Лемма о подстановке в формулу

- **Лемма 2.** Для произвольных формулы φ , терма t и произвольной оценки π верно

$$[\varphi(x := t)]_{\pi} = [\varphi]_{\pi, x := [t]_{\pi}}$$

если подстановка t вместо x в φ корректна.

- **Доказательство.** Индукция по структуре формулы.

База:

φ – атомарная формула. Следует из Леммы 1.

Индукционный переход:

Для пропозициональных связок тривиально.

Пусть φ имеет вид $\forall y\psi$, причем x свободен в ψ (иначе — тривиально). По условию подстановка t вместо x в φ корректна, то есть y не свободен в t , откуда подстановка t вместо x в ψ корректна. (см. след. слайд)

Лемма о подстановке в формулу (продолжение)

$$\begin{aligned} & [(\forall y \psi)(x := t)]_{\pi} = [\forall y(\psi(x := t))]_{\pi} = \\ & = \bigwedge_d [\psi(x := t)]_{\pi, y:=d} = & \text{(IH)} \\ & = \bigwedge_d [\psi]_{\pi, y:=d, x:=[t]_{\pi, y:=d}} = & (y \notin FV(t)) \\ & = \bigwedge_d [\psi]_{\pi, y:=d, x:=[t]_{\pi}} = \\ & = \bigwedge_d [\psi]_{\pi, x:=[t]_{\pi}, y:=d} = \\ & = [\forall y(\psi)]_{\pi, x:=[t]_{\pi}} = \\ & = [\varphi]_{\pi, x:=[t]_{\pi}} \end{aligned}$$

Для φ вида $\exists y \psi$ аналогично. ■

- Рассмотрим аксиому 12

$$\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x := \tau)$$

в произвольной интерпретации на произвольной оценке π .

- Пусть $[\forall x\varphi]_{\pi} = T$, тогда $[\varphi]_{\pi'} = T$ для любой π' , отличной от π по x ; в частности для π' равной π , $x := [\tau]_{\pi}$. Тогда по Лемме 2 $[\varphi(x := \tau)]_{\pi} = T$.
- Таким образом аксиома 12 истинна в произвольной интерпретации на произвольной оценке, то есть общезначима.
- Общезначимость аксиомы 13

$$\varphi(x := \tau) \rightarrow \exists x\varphi$$

аналогично.

- Рассмотрим первое правило Бернайса

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{\psi \rightarrow \forall x \varphi} \quad x \notin FV(\psi)$$

- Пусть $\psi \rightarrow \varphi$ общезначима. Покажем, что $\psi \rightarrow \forall x \varphi$.
- Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку π .
- Пусть $[\psi]_{\pi} = T$, тогда $[\psi]_{\pi, x := d} = T$ для любого d из носителя. Но тогда, поскольку $\psi \rightarrow \varphi$ общезначима, $[\varphi]_{\pi, x := d} = T$. Но это в точности означает, что $[\forall x \varphi]_{\pi} = T$.
- Таким образом первое правило Бернайса сохраняет общезначимость.

Сохранение общезначимости во втором правиле Бернайса

- Рассмотрим второе правило Бернайса

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi} \quad x \notin FV(\psi)$$

- Пусть $\varphi \rightarrow \psi$ общезначима. Покажем, что $\exists x \varphi \rightarrow \psi$ общезначима.
- Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку π .
- Пусть $[\exists x \varphi]_{\pi} = T$, тогда $[\varphi]_{\pi, x:=d} = T$ для некоторого d из носителя. Но тогда, поскольку $\varphi \rightarrow \psi$ общезначима, $[\psi]_{\pi, x:=d} = T$. Но ψ не зависит от x , то есть $[\psi]_{\pi} = T$.
- Таким образом второе правило Бернайса сохраняет общезначимость.

Итак, мы доказали следующий факт:

- **Теорема (о корректности ИП).** Любая формула, выводимая в исчислении предикатов, является общезначимой.

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез**
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте
- 6 Понижение мощности
- 7 Невыразимые предикаты

- В исчислении высказываний имело место лемма о дедукции: $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, A \vdash B$.
- Однако правило (Gen) без дополнительных ограничений порождает проблемы в исчислении предикатов:

$$P(x) \vdash \forall x P(x) \quad \text{ok, Gen}$$

$$\vdash P(x) \rightarrow \forall x P(x) \quad ???$$

Последнее необщезначимо.

- Очевидно, что Gen не стоит применять для связывания свободной переменной формулы-гипотезы.
- Иногда этот запрет формализуют явно, но часто удобнее требовать замкнутости гипотез.

- Произвольное множество замкнутых формул Γ сигнатуры σ называют *теорией* в этой сигнатуре.
- Говорят, что формула φ *выводима из Γ* (является *теоремой* теории Γ), если ее можно вывести, используя аксиомы и формулы из Γ ; нотация

$$\Gamma \vdash \varphi$$

- Интерпретация M сигнатуры σ называется *моделью* теории Γ , если все формулы из Γ истинны в M .

Лемма о дедукции для исчисления предикатов

Лемма о дедукции. Пусть Γ — множество замкнутых формул и A — замкнутая формула. Тогда $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, A \vdash B$.

Доказательство.

- Пусть $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Тогда и $\Gamma, A \vdash A \rightarrow B$, откуда из $\Gamma, A \vdash A$ по МР получаем искомый результат.
- Пусть $\Gamma, A \vdash B$. Рассмотрим вывод формулы B — последовательность формул

$$C_1, C_2, \dots, C_n$$

где C_n это B . Формула C_i может быть: (1) A , (2) из Γ , (3) аксиомой, (4) результатом применения МР к двум предыдущим, (5) результатом применения $\forall\forall$ к предыдущей формуле, (6) результатом применения $\forall\exists$ к предыдущей формуле.

Лемма о дедукции (продолжение доказательства)

Припишем ко всем формулам вывода посылку A и покажем, что эту цепочку можно расширить до вывода.

(1-4). Идентично случаю исчисления высказываний.

(5). В новой цепочке имеется переход от $A \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ к $A \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$. Вставляем формулы

$$A \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$$

$$A \wedge \psi \rightarrow \varphi$$

$$A \wedge \psi \rightarrow \forall x\varphi$$

$$A \rightarrow \psi \rightarrow \forall x\varphi$$

(6). В новой цепочке имеется переход от $A \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ к $A \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$. Вставляем формулы

$$A \rightarrow \varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \rightarrow A \rightarrow \psi$$

$$\exists x\varphi \rightarrow A \rightarrow \psi$$

$$A \rightarrow \exists x\varphi \rightarrow \psi$$



- Если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \subset \Delta$, то $\Delta \vdash A$.
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует конечное $\Delta \subset \Gamma$, такое что $\Delta \vdash A$.

- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash A$ тогда и только тогда, когда

$$\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow A$$

- **Теорема о корректности ИП (ver.2).** Все теоремы теории Γ истинны в любой модели M этой теории.
- **Доказательство.** Пусть A — теорема Γ , тогда найдутся $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in \Gamma$, такие что

$$\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k \rightarrow A$$

Эта формула выводима, значит истинна во всех интерпретациях (в т.ч. в M). Но в M истинны все φ_i (поскольку это модель), значит заключение импликации A тоже истинно. ■

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах**
- 5 Теорема Гёделя о полноте
- 6 Понижение мощности
- 7 Невыразимые предикаты

Лемма о свежих константах

- **Лемма (о свежих константах).** Пусть φ — формула ИП, а c — константа, не входящая в эту формулу. Тогда выводимость $\varphi(x := c)$ влечет выводимость φ .
- **Доказательство.** Возьмем свежую для φ переменную y . Вывод $\varphi(x := c)$ при замене c на y останется выводом:
 $\vdash \varphi(x := y)$.

1	$\varphi(x := y)$	Assumption
2	$\forall y \varphi(x := y)$	Gen
3	$\forall y \varphi(x := y) \rightarrow \varphi(x := y)(y := x)$	A12
4	$\varphi(x := y)(y := x)$	MP(2)(3)
5	φ	



- Лемма легко обобщается на случай нескольких констант.

- **Лемма (о добавлении констант)**. Пусть φ — формула ИП некоторой сигнатуры σ . Пусть она выводима в сигнатуре σ' , полученной из σ добавлением новых констант. Тогда φ выводима в ИП сигнатуры σ .
- **Доказательство**. Если в выводе формулы φ в σ' встречаются новые константы, заменяем их на свежие переменные. ■
- Лемма легко обобщается для произвольного расширения сигнатуры.
- Это означает, что можно говорить о выводимости формулы, не уточняя, в какой сигнатуре мы ищем вывод.

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте**
- 6 Понижение мощности
- 7 Невыразимые предикаты

Противоречивые теории

- Фиксируем сигнатуру σ и рассмотрим теорию Γ в этой сигнатуре.
- Теория Γ называется *противоречивой*, если в ней выводима некоторая формула и ее отрицание. В противном случае теория называется *непротиворечивой*.
- В противоречивой теории выводима любая формула:

1	$\Gamma \vdash \varphi$	Assumption
2	$\Gamma \vdash \neg\varphi$	Assumption
3	$\Gamma \vdash \neg \vdash \varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \psi$	A9
4	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$	MP(2)(3)
5	ψ	MP(1)(4)

- Любое подмножество непротиворечивого множества непротиворечиво.
- У бесконечного противоречивого множества есть конечное противоречивое подмножество.

- Интерпретация M сигнатуры σ называется *моделью* теории Γ , если все формулы из Γ истинны в M .
- **Теорема о корректности ИП (ver.2)**. Все теоремы теории Γ истинны в любой модели M этой теории.
- Множество формул Γ называют *совместным*, если оно имеет модель.
- **Теорема о корректности ИП (ver.3)**. Любое совместное множество замкнутых формул непротиворечиво.
Доказательство. (от противного) Пусть имеется замкнутая φ , такая что $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Но из совместности следует наличие модели M , в которой φ и $\neg\varphi$ должны быть истинны одновременно. ■

- Теория Γ в сигнатуре σ называется *полной* в этой сигнатуре если для любой **замкнутой** формулы φ **этой сигнатуры** либо φ , либо $\neg\varphi$ является теоремой теории Γ :

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{or} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

- Фиксация сигнатуры важна: если символ S не входит в сигнатуру σ , но используется в формуле ψ , то $\Gamma \not\vdash \psi$ и $\Gamma \not\vdash \neg\psi$, например

$$\Gamma \not\vdash \exists x S(x) \quad \Gamma \not\vdash \neg\exists x S(x)$$

- Замкнутость формулы φ тоже важна: множество истинных формул сигнатуры $(0^0, S^1, =^2)$ полно, но ни $x = y$, ни $\neg(x = y)$ из него не выводимо.

- Цель — доказать, что **любая непротиворечивая теория совместна**.
- Как это делалось в логике высказываний:
 - 1 расширили Γ до полного множества $\Delta \supset \Gamma$;
 - 2 для всякой пропозициональной переменной p полагали

$$p = T, \quad \text{if } \Delta \vdash p,$$

$$p = F, \quad \text{if } \Delta \vdash \neg p;$$

- 3 показывали, что такое означивание приводит к истинности всех формул Δ (а значит и Γ).
- В логике предикатов будем действовать по той же схеме.
 - Однако, у нас будут проблемы с шагом 2: нам нужно будет как-то смонтировать носитель интерпретации.

- **Лемма (о пополнении).** Всякое непротиворечивое множество Γ сигнатуры σ содержится в непротиворечивом полном множестве Δ той же сигнатуры.
- **Доказательство.** Пусть φ произвольная формула сигнатуры σ . Рассмотрим Γ, φ и $\Gamma, \neg\varphi$. Одно из них непротиворечиво. Действительно, если противоречивы оба, то $\Gamma \vdash \neg\varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$, что противоречит непротиворечивости Γ . Будем теперь перебирать все допустимые формулы, добавляя к Γ либо формулу, либо отрицание, сохраняя непротиворечивость. ■

- Для работы с семантическим понятием совместности нам нужно задать некоторую интерпретацию. Возьмем в качестве носителя T множество всех замкнутых термов нашей сигнатуры σ .
- Функциональные символы при этом интерпретируются “естественным образом”: функциональному символу f арности n ставится в соответствие такая функция $[f]$

$$[f]([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$$

Здесь t_1, \dots, t_n и $f(t_1, \dots, t_n)$ — замкнутые термы нашей сигнатуры (то есть элементы носителя D).

- Предикатный символ P арности n интерпретируем как предикат $[P]$, который истинен на замкнутых термах t_1, \dots, t_n , если

$$\Gamma \vdash P(t_1, \dots, t_n)$$

- Наша цель — доказать (индуктивно по структуре формулы), что в построенной интерпретации истинны все формулы из Γ .
- Но наша интерпретация может быть слишком бедной: может оказаться, что $\Gamma \vdash \exists x A(x)$, но ни для какого замкнутого термина t формула $A(t)$ не выводима из Γ .
- Теория Γ называется *экзистенциально полной* в сигнатуре σ , если для всякой замкнутой формулы $\exists x \varphi$, являющейся теоремой этой сигнатуры, найдется терм t этой сигнатуры, такой что $\Gamma \vdash \varphi(x := t)$.

Лемма об экзистенциальном пополнении

- **Лемма (об экзистенциальном пополнении).** Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры σ , причем из Γ выводима замкнутая формула $\exists x\varphi$. Пусть c — свежая для Γ и φ константа. Тогда множество $\Gamma, \varphi(x := c)$ непротиворечиво.
- **Доказательство.** Пусть $\Gamma, \varphi(x := c)$ противоречиво. Тогда имеется конечное $\Delta \subset \Gamma$, такое что

- 1 $\Delta \vdash \neg\varphi(x := c)$
- 2 $\Delta \vdash \neg\varphi$ FreshConstLemma
- 3 $\vdash \bigwedge_i \Delta \rightarrow \neg\varphi$ DeductLemma
- 4 $\vdash \varphi \rightarrow \neg(\bigwedge_i \Delta)$ Contraposition
- 5 $\vdash \exists x\varphi \rightarrow \neg(\bigwedge_i \Delta)$ В \exists

Но по условию $\Gamma \vdash \exists x\varphi$, значит Δ противоречиво, а значит и Γ . Противоречие. ■

- **Лемма.** Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры σ . Тогда существует расширение сигнатуры σ новыми константами и расширение множества Γ до множества Δ , такого что оно непротиворечиво, полно и экзистенциально полно в расширенной сигнатуре.
- **Доказательство.**
 - 1 Последовательно применим лемму об экзистенциальном пополнении ко всем замкнутым формулам вида $\exists x\varphi$, выводимым из Γ .
 - 2 Пополним это множество, применив лемму о пополнении.Повторим эти два шага счетное число раз. Объединение полученных множеств будет непротиворечивым, полным и экзистенциально полным. ■

Лемма. Пусть Γ — полное и экзистенциально полное множество замкнутых формул сигнатуры σ . Тогда существует интерпретация M сигнатуры σ , в которой истинны все формулы из Γ .

Доказательство. Возьмем в качестве носителя M все замкнутые термы сигнатуры σ . Интерпретация функциональных и предикатных символов описана ранее. Индукцией по числу связок и кванторов формулы φ докажем

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow [\varphi] = T$$

База. Атомарные формулы таковы по построению (см. интерпретацию предикатных символов).

Индукционный переход. (пропозициональные связки)
Аналогично доказательству для исчисления высказываний.
Проверяем, что выводимость и истинность “устроены одинаково”

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash \neg \varphi &\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \text{ or } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi &\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi &\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \psi\end{aligned}$$

Это легко показать, поскольку любые частные случаи пропозициональных тавтологий выводимы.

Лемма о существовании модели (продолжение 2)

Индукционный переход. (кванторы) Пусть φ имеет вид $\exists x\psi$ (в ψ единственный параметр — x).

(\Rightarrow) Пусть $\Gamma \vdash \exists x\psi$. Из экзистенциальной полноты Γ следует существование константы c , такой что $\Gamma \vdash \psi(x := c)$. В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в \mathcal{M} она истинна:

$[\psi(x := c)] = T$. Тогда ψ истинна на оценке $\pi(x) = c$, откуда $[\exists x\psi] = T$.

(\Leftarrow) Пусть $[\exists x\psi] = T$. Тогда найдется элемент носителя (y нас — замкнутый терм t), для которого $[\psi]_{x:=t} = T$. Отсюда в нашей интерпретации $[\psi(x := t)] = T$. По (IH) $\Gamma \vdash \psi(x := t)$, откуда, используя аксиому 13 $\psi(x := t) \rightarrow \exists x\psi$, заключаем, что $\Gamma \vdash \exists x\psi$.

Для $\Gamma \vdash \forall x\psi \Leftrightarrow [\forall x\psi] = T$ — аналогично. ■

- **Теорема** Непротиворечивое множество замкнутых формул имеет модель.

Доказательство. Расширяем множество до полного и экзистенциально полного и берем в качестве модели построенную выше интерпретацию ■.

- **Теорема о полноте ИП (сильная форма)** Любая непротиворечивая теория совместна.

- **Теорема о полноте ИП (слабая форма)** Любая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов.

Доказательство. Пусть φ общезначима, **замкнута** и невыводима. Тогда $\{\neg\varphi\}$ непротиворечиво, а значит имеет модель. В этой модели $[\neg\varphi] = \text{T}$, откуда $[\varphi] = \text{F}$, что противоречит общезначимости φ . ■.

- **Теорема (о компактности)** Пусть Γ — бесконечное множество замкнутых формул сигнатуры σ . Пусть любое его конечное подмножество имеет модель. Тогда само Γ тоже имеет модель.
- **Доказательство.** Наличие модели равносильно непротиворечивости. Но противоречие выводится из конечного числа формул Γ . ■

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте
- 6 Понижение мощности**
- 7 Невыразимые предикаты

- Две интерпретации заданной сигнатуры σ называют **элементарно эквивалентными**, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы данной сигнатуры.
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D_1 \rightarrow D_2$ называется *изоморфизмом* интерпретаций, если оно сохраняет все функции и предикаты этих интерпретаций. А именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{aligned} [P]_2 (\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &\Leftrightarrow [P]_1 (x_1, \dots, x_n) \\ [f]_2 (\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &= \alpha([f]_1 (x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

на любых наборах $x_1, \dots, x_n \in D_1$.

- **Теорема.** Изоморфные интерпретации элементарно эквивалентны.

- Пусть имеется интерпретация некоторой сигнатуры с носителем D . Рассмотрим подмножество $D' \subset D$. Если D' замкнуто относительно сигнатурных функций, то получится новая интерпретация, называемая *подструктурой* исходной.
- **Теорема (Левенгейм-Сколем)**. Пусть дана конечная или счетная сигнатура σ и ее бесконечная интерпретация с носителем D . Тогда имеется подструктура со счетным носителем $D' \subset D$ элементарно эквивалентная исходной.
- **Доказательство (скетч)**. Берем произвольное счетное подмножество, расширяем его до замкнутого относительно сигнатурных функций и экзистенциально замкнутого. Повторяем счетное число раз. ■ (см. Верещагин, Шень, ЯиИ, 3.11)

- 1 Формулировка исчисления
- 2 Корректность исчисления
- 3 Вывод из гипотез
- 4 Леммы о константах
- 5 Теорема Гёделя о полноте
- 6 Понижение мощности
- 7 **Невыразимые предикаты**

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем \mathbb{N} и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq) мы можем выразить так:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем \mathbb{N} и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq) мы можем выразить так:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на \mathbb{Z} ?

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем \mathbb{N} и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq) мы можем выразить так:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на \mathbb{Z} ?
- Порядок станет невыразимым!

- Пусть дана сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D .
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D \rightarrow D$ называется *автоморфизмом* интерпретации, если все функции и предикаты этой интерпретации *устойчивы* относительно α , а именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{aligned} [P](\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &\Leftrightarrow [P](x_1, \dots, x_n) \\ [f](\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &= \alpha([f](x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

на любых наборах $x_1, \dots, x_n \in D$.

- Например, отображение $x \mapsto -x$ является автоморфизмом для нормальной интерпретации сигнатуры $(+^2, =^2)$ с носителем \mathbb{Z} и $[+] = +$.

Теорема об устойчивости относительно автоморфизмов

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**

- Рассмотрим произвольную оценку π и обозначим $\alpha \circ \pi$ новую оценку, полученную применением автоморфизма к π .
- Индукцией по структуре терма показываем

$$[t]_{\alpha \circ \pi} = \alpha([t]_{\pi})$$

- Индукцией по структуре формулы показываем

$$[\varphi]_{\alpha \circ \pi} = \alpha([\varphi]_{\pi}) \quad \blacksquare$$

- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель \mathbb{Z} , естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$.

Аutomорфизм —

Теорема об устойчивости относительно автоморфизмов

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**

- Рассмотрим произвольную оценку π и обозначим $\alpha \circ \pi$ новую оценку, полученную применением автоморфизма к π .
- Индукцией по структуре терма показываем

$$[t]_{\alpha \circ \pi} = \alpha([t]_{\pi})$$

- Индукцией по структуре формулы показываем

$$[\varphi]_{\alpha \circ \pi} = \alpha([\varphi]_{\pi}) \quad \blacksquare$$

- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель \mathbb{Z} , естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$.

Аutomорфизм — $x \mapsto x + 42$.