Математическая логика

Практика 1, 2

22/02/2018

(С)ДНФ и (С)КНФ

Разминка:

- Построить ДНФ, КНФ, СДНФ и СКНФ для формулы $p \to q$
- Представить формулу $p \wedge q$ в СКНФ
- Построить СДНФ для формулы $p \vee q \wedge r$ с помощью эквивалентных преобразований.

Минимизация ДНФ

Несколько определений:

$\mathfrak{Def}$. ***Длина ДНФ*** *– это число входящих в нее конъюнктов.*

$\mathfrak{Def}$. ***Кратчайшая ДНФ*** *– ДНФ, имеющая наименьшую длину, среди всех ей эквивалентных ДНФ.*

$\mathfrak{Def}$. ***Минимальная ДНФ*** *– ДНФ, содержащая наименьшее число литералов, среди всех ей эквивалентных ДНФ.*

$\mathfrak{Def}$. ***Элементарное произведение*** *– это конъюнкт, в котором любая переменная встречается не более одного раза.*

$\mathfrak{Def}$. ***Импликанта формулы*** A *– это формула* A_0 *такая что:*

1. *A_0 является элементарным произведением*

2. *$A \wedge A_0 \leftrightarrow A_0$*

$\mathfrak{Def}$. ***Простая импликанта*** *A_0 формулы A – это импликанта, которая перестает являться импликантой при отбрасывании любого литерала.*

$\mathfrak{Def}$. ***Сокращенная ДНФ*** *– это дизъюнкция всех простых импликант данной формулы.*

Задание:

- Постройте все возможные импликанты для формулы $p \to q$ и выделите среди них простые.
- Постройте затем сокращенную ДНФ для формулы выше.

Замечание. *Если из сокращенной ДНФ удалить все лишние(то есть не меняющие таблицу истинности) простые импликанты, то получится* ***тупиковая ДНФ****. Среди тупиковых ДНФ ищут* ***минимальную ДНФ***

Собственно минимизация ДНФ методом Квайна.
Определим три операции:

1. Полное склеивание:

$$A \wedge p \vee A \wedge \neg p \leftrightarrow A \wedge (p \vee \neg p) \leftrightarrow A$$

2. Неполное склеивание:

$$A \wedge p \vee A \wedge \neg p \leftrightarrow A \vee A \wedge p \vee A \wedge \neg p$$

3. Элементарное поглощение:

$$A \wedge p \vee A \leftrightarrow A \quad \text{или} \quad A \wedge \neg p \vee A \leftrightarrow A$$

Теорема (Willard Van Orman Quine)**.** *Если исходя из СДНФ функции произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ, то есть дизъюнкция всех простых импликант.*

Задание:

- Постройте сокращенную ДНФ для формулы:

$$\neg p \wedge q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge q \wedge r \vee p \wedge \neg q \wedge r \vee p \wedge q \wedge \neg r \vee p \wedge q \wedge r$$

Для получения минимальной ДНФ из сокращенной ДНФ строят матрицу (таблицу) Квайна: в столбцах конституенты(конъюнкты) единицы исходной совершенной ДНФ; в строках — простые импликанты получившиеся при построении сокращенной ДНФ. В матрице маркируются ячейки, для которых конъюнкт, стоящий в заголовке строки, входит в конституенту единицы, являющейся заголовком столбца.

В тупиковую ДНФ выбирается минимальное число простых импликант, дизъюнкция которых сохраняет все конституенты единицы. В качестве минимальной ДНФ выбирается тупиковая, которая имеет наименьшее число вхождений переменных.

Полиномы Жегалкина

Напомним свойства связки $\oplus$:

$$\begin{aligned} \neg A &\leftrightarrow A \oplus 1 \\ A \oplus A &\leftrightarrow 0 \\ A \vee B &\leftrightarrow A \oplus B \oplus A \wedge B \\ A \wedge (B \oplus C) &\leftrightarrow A \wedge B \oplus A \wedge C \end{aligned}$$

Постройте полиномы Жегалкина для формул:

1. $p \to q$
2. $p \leftrightarrow q$
3. $p \uparrow q$
4. $p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q \wedge \neg r$

используя приведенные выше эквивалентности.

Можно строить полином Жегалкина для формул, заданных в виде таблицы истинности, например. Для этого применяется так называемый метод неопределенных коэффициентов. Его суть состоит в том,

что сначала выписывается полином с неопределенными коэффициентами, а затем в него подставляются значения переменных в порядке увеличения числа единиц. За одну подстановку находится один коэффициент, например, при подстановке всех нулей мы найдем свободный член в полиноме и так далее.
Задание:

- Постройте полином Жегалкина для функции со следующей таблицей истинности, используя метод неопределенных коэффициентов.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Полные системы связок

Теперь у нас есть теорема Поста, которая позволяет говорить, является ли набор булевых функций полным. Воспользуйтесь ей и докажите, что следующая система связок не является полной:

$$(\oplus, \wedge)$$

Домашнее задание

1. Постройте минимальную ДНФ для формул:
   - (1б.) $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r \vee \neg p \wedge q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge q \wedge r \vee p \wedge q \wedge \neg r$
   - (1б.) $\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \vee \neg p \wedge q \wedge r \wedge s \vee p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \vee p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \vee p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \vee p \wedge q \wedge r \wedge \neg s \vee p \wedge q \wedge r \wedge s$

2. (1б.) Постройте полином Жегалкина для функции со следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

3. Докажите, что следующие системы связок полны:

   - (1б.) $(\oplus, \vee, 1)$
   - (1б.) $(\rightarrow, 0)$