Производящие функции Дирихле. Формулы обращения Мебиуса.

21 апреля 2017 г.

1. Функцией Эйлера $\phi(z)$ называется формальный степенной ряд вида
$$\phi(z) = \frac{\phi_1}{1^z} + \frac{\phi_2}{2^z} + \ldots + \frac{\phi_n}{n^z} + \ldots,$$
коэффициенты ϕ_n которой подсчитывают количество чисел $0 < d < n$, меньших n и взаимно-простых с ним. Доказать, что для любого $n \geq 0$ справедливо тождество
$$n = \sum_{d \backslash n} \phi_d.$$

2. Показать, что на языке рядов Дирихле доказанное в предыдущем упражнении тождество для чисел ϕ_d переписывается в виде
$$\zeta(z-1) = \zeta(z) \cdot \phi(z).$$

3. Доказать следующую явную формулу для вычисления коэффициентов ϕ_n функции Эйлера:
$$\phi_n = \sum_{d \backslash n} \mu_d \frac{n}{d} = n \sum_{d \backslash n} \frac{\mu_d}{d}. \qquad (1)$$

4. Доказать эквивалентность доказанной в предыдущем упражнении формулы (1) и формулы
$$\phi_n = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$
где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые множители числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$.

5. Доказать, что функция Мебиуса решетки L_n линейно упорядоченного множества рассчитывается по формуле

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ -1, & \text{если } x = y - 1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

6. Пусть x и y есть пара элементов частично упорядоченного множества P, таких, что $x \preccurlyeq y$. Мультицепью назовем мультимножество элементов $x_1, \ldots, x_k$, таких, что $x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x_k$. Доказать, что количество мультицепей вида

$$x := x_0 \preccurlyeq x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x_k =: y$$

равняется $\zeta^k(x, y)$.

7. Пусть $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, а P есть множество всех подмножеств этого множества $[n]$. Докажите, что отношение $\subseteq$ вводит на P отношение частичного порядка, т.е. что множество P всех подмножеств n-элементного множества вместе с отношением $\subseteq$ образует частично упорядоченное множество. Такое частично упорядоченное множество обозначают через B_n и называют булевой алгеброй степени n.

8. Доказать, что любая конечная решетка имеет максимальный $\hat{1}$ и минимальный $\hat{0}$ элемент. Привести пример решетки, в которой минимальный элемент отсутствует.

9. Доказать, что в любой решетке $(x \wedge y) \vee y = y$ и $(x \vee y) \wedge y = y$ (законы поглощения).

10. Нарисовать диаграммы Хассе всех решеток, содержащих не более пяти элементов.