

Занятие 3

1. Доказать, что количество путей на плоскости, выходящих из начала координат, приходящих в точку с координатами (n, n) , состоящих из отрезков $(0, 1)$ и $(1, 0)$, и не поднимающихся выше диагонали $x = y$, описывается числами Каталана.
2. Установить биекцию между множеством плоских бинарных корневых деревьев, построенных на n вершинах, и множеством правильных скобочных последовательностей длины $2n$, доказав, тем самым, что количество таких деревьев равно числу Каталана C_n .
3. Доказать, что количество расстановок скобок в выражениях вида $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$ описывается числами Каталана C_n .
4. Разбиение π множества $[n]$ на блоки $\beta_1, \dots, \beta_k$ называется непересекающимся, если не существует никакой четверки линейно упорядоченных чисел

$$1 \leq a < b < c < d \leq n,$$

такой, что $a, c \in \beta_i$, а $b, d \in \beta_j$ для некоторых блоков β_i и β_j разбиения π . Выписать все непересекающиеся разбиения множества $[3]$. Доказать, что количество таких разбиений описывается числами Каталана C_n .

5. Рассмотрим множество путей, исходящих из точки с координатами $(0, 0)$, приходящих в точку с координатами $(n, 0)$, состоящих из отрезков $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(1, 0)$, и нигде не опускающихся ниже оси абсцисс. Такие пути называются путями Моцкина. Вывести рекуррентное соотношение для подсчета количества M_n всех таких путей.
6. Используя прямые комбинаторные соображения, доказать, что

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_k \binom{n}{2k},$$

где C_k — числа Каталана.