Основные операции над графами. Деревья.

1. Пусть G есть граф, построенный на $n \geq 2$ вершинах, $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ есть минимальная и максимальная степени вершин в графе G. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

   a) удаление вершины степени $\Delta(G)$ не может увеличить среднюю степень вершин в графе;

   b) удаление вершины степени $\delta(G)$ не может уменьшить среднюю степень вершин в графе.

   .

2. Доказать, что любой простой связный граф $G \neq K_n$, построенный на $n \geq 3$ вершинах, содержит в качестве своего подграфа индуцированный путь P_3 длины 2 (определение, экстремальность).

3. Доказать, что в каждом связном графе G без петель, построенном на $n \geq 2$ вершинах, найдутся по меньшей мере две вершины, не являющиеся точками сочленения

4. Пусть T_D есть ориентированное дерево, а $F \subseteq E(T_D)$ есть произвольное подмножество множества ребер дерева T_D. Доказать, что в дереве T найдется вершина x, такая, что все ребра из F, инцидентные x, входят в x, а все ребра из подмножества $E(T_D) \setminus F$, инцидентные x, из этой вершины выходят.

5. Рассмотрим произвольную неубывающую последовательность $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, $n \geq 2$, положительных натуральных чисел. Доказать, что равенство
$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n - 2, \qquad d_i > 0 \tag{1}$$
является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта последовательность была графовой для некоторого дерева T, построенного на n вершинах.

6. Построить все различные корневые непомеченные деревья на четырех вершинах. Для каждого такого дерева построить максимальный по количеству ребер простой связный граф на четырех вершинах, в котором поиск в глубину, начинающийся с выделенной вершины, гарантированно даст на выходе заданное корневое дерево.

7. Доказать, что любой граф G без петель содержит остовный двудольный подграф F, степень любой вершины x в котором больше или равна $\deg(x)/2$, где $\deg(x)$ — степень той же вершины в исходном графе.

8. Пусть G есть простой граф без треугольников, то есть граф, не содержащий K_3 в качестве своего индуцированного цикла. Показать, что максимальное количество ребер в таком графе не превосходит $n^2/4$.

9. Пусть G есть k-регулярный двудольный граф, $k \geq 2$. Доказать, что в таком графе мосты отсутствуют.

10. Наряду с диаметром при изучении расстояний в графе часто используется так называемый Wiegner index

$$W(G) := \sum_{x,y \in V(G)} d(x,y)$$

графа G, характеризующий среднее расстояние между вершинами в графе. В частности, Вигнер использовал этот индекс для изучения точки плавления парафина. В дальнейшем оказалось, что многие химические свойства молекул связаны с Wiegner index соответствующих этим молекулам графов. Доказать, что среди всех деревьев на n вершинах минимальное значение $W(G)$ достигается на графах-звездах, а максимальное — на путях P_n длины n.

11. Пусть G есть простой граф, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Доказать, что количество m ребер в таком графе лежит в диапазоне

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

12. Пусть дерево T, построенное на n вершинах, имеет диаметр, больший или равный $2k-3$. Доказать, что в таком дереве имеется как минимум $n-k$ путей длины k.