Быстрое преобразование Фурье

$$A(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_d x^d$$
$$B(x) = b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_d x^d$$

$C(x) = A(x) \cdot B(x)$ — полином степени $2d$ ($2d+1$ коэфф.)

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \qquad O(i) \text{ членов}$$

Для всего $C(x)$ нужно $\sum_{i=0}^{2d} O(i) = O(d^2)$

Можно улучшить до $O(d \log d)$.

$\exists$ 2 представления полиномов

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} a_0, a_1 \ldots a_d \\ \text{коэфф.} \end{array}} \arrow[r, bend left, "\text{вычисление}"] & \boxed{\begin{array}{c} A(x_0), A(x_1), \ldots, A(x_d) \\ \text{значения} \end{array}} \arrow[l, bend left, "\text{интерполяция}"]
\end{tikzcd}$$

$$C(x) = A(x) B(x)$$

$$C(x_i) = A(x_i) B(x_i) \quad \forall x_i \qquad // \; i = 1 \ldots (2d+1)$$

Умножение полиномов, заданных значениями делается за $O(d)$

Вычисление $\qquad // \; n = d+1$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Вычислить $A(x_0)$ за $\Theta(n)$

Идея!

$x \quad \pm x_0, \pm x_1, \ldots, \pm x_{n/2-1}$

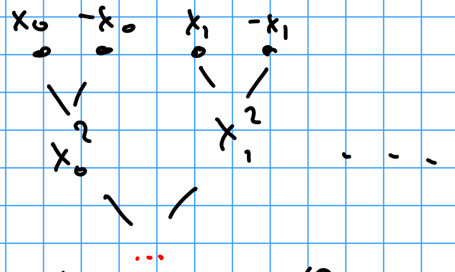
$$A(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1} =$$
$$= (a_0 + a_2 x_0^2 + a_4 x_0^4 + \ldots) + x_0 (a_1 + a_3 x_0^2 + a_5 x_0^4 + \ldots)$$
$$= A_0(x_0^2) + x_0 A_1(x_0^2)$$

A_0 и A_1 — полиномы степени $n/2 - 1$

$$A(-x_0) = A_0(x_0^2) - x_0 A_1(x_0^2)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$ // Круто, но не работает

$$T(n) = O(n \log n)$$



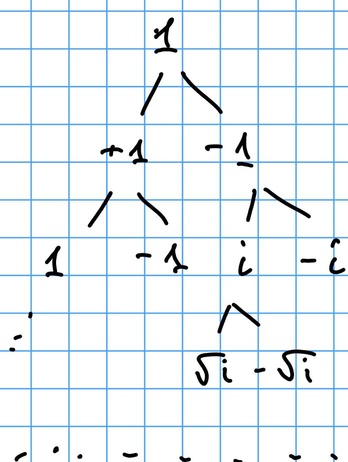
$x_0^2 \geq 0$

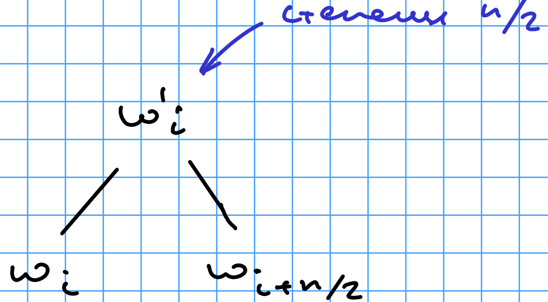
Над $\mathbb{R}$ — фейл :-(

Давайте работать над $\mathbb{C}$

∢ с конца.

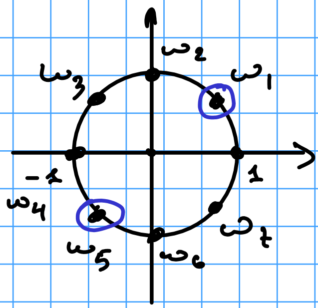
Последняя итерация — вычисление полинома в одной точке.





Возьмем $\{x_i\} = \{1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\}$, ω_i — корни из 1 степени n

$n = 8$



n - степень двойки.

$$\omega_k = e^{2i\pi k/n} = \omega_1^{k}$$

Пары! ω_k и $\omega_{n/2+k}$

$$\omega_k^2 = (\omega_{n/2+k})^2 \qquad \omega_k = -\omega_{n/2+k}$$

ω_k^2 — корень из единицы степени $n/2$

$$(\omega_{n/2+k})^2 = \left(e^{2\pi i(n/2+k)/n}\right)^2 = e^{2\pi i(n+2k)/n} =$$

$$= \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{e^{2\pi i}} \cdot \left(e^{2\pi i k/n}\right)^2 = \omega_k^2$$

корень из единицы степени n

$FFT(A(x) = a_0 \ldots a_{n-1},\ \omega)$

  if $\omega = 1$

    return $(A(1))$

  $A(x) = A_0(x^2) + x A_1(x^2)$

  $(A_0(1) .. A_0(\omega^{n-2})) = FFT(A_0(x), \omega^2)$

  $(A_1(1) .. A_1(\omega^{n-2})) = FFT(A_1(x), \omega^2)$

  for $k = 0$ to $n-1$

    $A(\omega^k) = A_0(\omega^{2k}) + \omega^k A_1(\omega^{2k})$

  return $(A(1), A(\omega), A(\omega^2), \ldots A(\omega^{n-1}))$

Время: $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

$T(n) = O(n \log n)$

Интерполяция

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \frac{1}{n} FFT(\langle A(1), A(\omega), \ldots, A(\omega^{n-1})\rangle, \omega^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} A(x_0) \\ A(x_1) \\ \vdots \\ A(x_{n-1}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{n-1} & & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{M_n} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

M_n Матрица Вандермонда

Если все x_i - различные $\Rightarrow \exists M_n^{-1}$

$$\begin{bmatrix} A(1) \\ A(\omega) \\ \vdots \\ A(\omega^{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ & & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

M_n

$$[M_n]_{ij} = \omega^{i \cdot j}$$

$$\forall\, M'_n : \quad [M'_n]_{ij} = \omega^{-ij}$$

$$[M_n \cdot M'_n]_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ik} \cdot \omega^{-kj}$$

$$[M_n \cdot M'_n]_{ii} = n$$

$$\underset{i \neq j}{[M_n \cdot M'_n]_{ij}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(i-j)\cdot k} = \frac{\omega^{n\cdot(i-j)} - 1}{\omega^{(i-j)} - 1} = 0$$

$$\Rightarrow M_n^{-1} = \frac{1}{n} \cdot M'_n$$

Mult(A(x), B(x))

$A(x)$, $B(x)$ — степени $\le \frac{n}{2}$

ω — корень степени n

$X = FFT(A(x), \omega)$

$Y = FFT(B(x), \omega)$

$Z = X \odot Y$ // покомпонентно

return $\frac{1}{n} FFT(Z, \omega^{-1})$