Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов с параметром. Эйлеровы интегралы. 28.02.18

Дифференцирование. Если функции $f(x;\alpha)$ и $f'_\alpha(x;\alpha)$ непрерывны на множестве

$$G = \{(a;\alpha) : a \le x < \infty, \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\},$$

интеграл $I(\alpha) = \int_a^\infty f(x;\alpha)dx$ сходится при каждом $\alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]$, а интеграл $\int_a^\infty f'_\alpha(x;\alpha)dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, то

$$I'(\alpha) = \int_a^\infty f'_\alpha(x;\alpha)dx$$

при $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$.

Интегрирование несобственного интеграла по параметру Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве $G = \{(x;\alpha) : a \le x < \infty, \alpha_1 \le \alpha < \alpha_2\}$ и интеграл $\int_a^\infty f(x;\alpha)dx$ равномерно сходится по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, то справедлива формула

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^\infty f(x;\alpha)dx = \int_a^\infty dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x;\alpha)d\alpha.$$

Если $f(x;\alpha) \ge 0$ на множестве G, то последнее равенство остается в силе также и для бесконечного промежутка $(\alpha_1;\alpha_2)$ в предположении,что внутренние интегралы являются непрерывными функциями и хотя бы одна из частей этого равенства имеет смысл.

1. Вычислите интеграл Дирихле $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$.

   (сначала докажите, что $K(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\, dx = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$).

   Ну или просто поверьте в ответ $\pi/2\,\mathrm{sign}(\alpha)$ и переходите к следующему номеру.

2. Вычислите $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos\alpha x}{x^2} dx$.

3. Вычислите $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^2}{x} dx$.

4. Вычислите $I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\alpha x)dx$.

Эйлеровы и не только интегралы

Интеграл $\Gamma(\rho) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, сходящийся при $p > 0$, называют гамма-функцией, а интеграл $B(p;q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, сходящийся при $p,q > 0$ называют бета-функцией. Основные формулы:

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $p > 0$,
2. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$,
3. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$,
4. $B(p;q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $p,q > 0$.

Задачки:

1. $\int_0^1 \ln^p(\frac{1}{x})dx$;
2. Вычислите $I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$, $0 < \alpha < 1$.
3. Докажите, что $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$.
4. Вычислите $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{(x-2)^2}$.
5. Вычислите $\int_0^1 \sqrt{t-t^2}dt$.
6. Вычислите $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx$.
7. Вычислите $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}$.