Теорвер 180503

Швецова Анна

May 6, 2018

Задачи на зачёт по теор. веру.

1. Элементарные вероятности (сх. Лапласа)
2. Условные вероятности, схема Бернулли
3. Распределение величин и векторов
4. Моменты
5. Характеристические и произв. функции
6. Предельные теоремы

Разбор предыдущей домашки

1. $\xi_k = \begin{cases} 2^k, \frac{1}{2^{k+1}} \\ 0, 1-2^k \\ -2^k, \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases}$

   $E\xi_k = 0$, $D\xi_k = E(\xi_k^2) = 2^k$

   $\sqrt{DS_n} \sim 2^{\frac{n+1}{2}}$

   Давайте заметим, что начиная с некоторого места все будут равны 0 с вероятностью 1. Найдём то место среди ξ_k, после которого будут простые нули.

   $P(\frac{S_n}{n} < \varepsilon) \geq P(\xi_k = \xi_{k+1} = \ldots = 0)$ (т.е. все с номера k равны 0).

   $k := [\log_2(\varepsilon)] - 1$.

   $P(\text{есть не ноль}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} P(\xi_j \neq 0) = \sum_k \frac{1}{2^j} \underset{k\to\infty}{\to} 0$

   Тогда $P(\xi_k = \xi_{k+1} = \ldots = 0) \to 1$

   Получили ЗБЧ, но не ЦПТ т.к. при ЦПТ оно должно уходить в нормальное распределение, а не в 0.

2. $\xi_k = \begin{cases} 1, p \\ -1, q = 1-p \end{cases}$

   $\sum_1^{\infty} \frac{\xi_k}{k} =?$

Помотрим на моменты:

$E\xi_k = p - q$, $ES_n = (p-q)\sum_1^n \frac{1}{k}$ – расходится

$D\xi_k = 1 - (p-q)^2 = 4pq$, $DS_n = 4pq\sum_1^n \frac{1}{k^2}$.

Тогда при $p \neq q$ мы получаем, что матожидание уходит в бесконечность, а дисперсия конечна. Тогда неравенством Чебышёва получим, что хотели.

Теперь рассимотрим $q = p = \frac{1}{2}$.

$\varphi_{S_n} = \Pi_{k=1}^n \cos(\frac{t}{k})$

Прологарифмируем.

Попробуем там получить что-то по признаку Коши.

$\ln(\Pi_{k=m}^{m+n}\cos(\frac{t}{k})) = \sum\ln(\cos\frac{t}{k}) = \sum\ln(1-(1-\cos\frac{t}{k})) \sim -\sum(1-\cos\frac{t}{k}) \sim -\sum_m^{m+n}\frac{t^2}{2k^2} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Значит, ряд сходится и предельное распределение есть. Нормально ли оно?

$\varphi_{S_n} = \Pi_{k=1}^n \cos(\frac{t}{k}) \to \Pi_1^\infty \cos\frac{t}{k} \overset{?}{=} e^{-\frac{b^2t^2}{2}}$

Нет, не нормально. Т.к. у cos бесконечно много нулей, а у e^x их нет.

3. n вытааскиваний из $\{1, 2, \dots n\}$ с повторениями.

   ξ_n – доля непоявившихся номеров.

   Три подхода: посмотреть моменты, посмотреть на характеристическую функцию или смотреть глубже.

   $\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n$(карты k нету)

   $E\xi_n = \frac{1}{n}n(\frac{n-1}{n})^n \to e^{-1}$.

   $cov(\eta, \xi) = E(\eta\xi) - E\eta E\xi$.

   $D\xi_n = \frac{1}{n^2}\sum cov(1_i, 1_j) = \frac{1}{n^2}(n(\frac{n-1}{n})^n(1-(\frac{n-1}{n})^n) + (n^2-n)((\frac{n-2}{n})^n - (\frac{n-1}{n})^{2n}) \to 0$ – левое слагаемое – дисперсии, правое – оставшиеся $n^2 - n$ слагаемых матрицы.

   Левое слагаемое сходится к 0, а слагаемые правого слагаемого сходятся к e^{-2} и противоположны по знаку.

   Если у последовательности величин матожидание сходится к константе, а дисперсия к 0, то последовательность сходится к константе по вероятности и по распределению.

Поговорим о парадоксах.

1. Парадокс Шавалье Де Мере. Сколько раз кидать кубик, чтобы вероятность получить хотя бы одну шестёрку была больше половины? Иначе говоря, найти медиану.

   (a) 1 кубик до ”6”, $p = \frac{1}{6}$, $3 < med < 4$

(b) 2 кубика до "6-6" $p = \frac{1}{36}$, $24 < med < 25$

$(1-p)^x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\ln 2}{-\ln(1-p)} = \frac{\ln 2}{p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{6} + \ldots}$.

2. Парадокс дней рождений. Есть n человек, при каком n вероятность др двух людей сопасть больше $\frac{1}{2}$.

   'Внезапно' где-то 22-23.

3. Парадокс "Поле чудес"

   Есть 3 шкатулки, две пустые. Мы выбрали какую-то.

   Ведущий открывает одну из шкатулок, та пустая. Нужно ли поменять выбор? Нужно. Вероятности при случайном выборе распределились как $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$

4. Проигрышная игра. (Задача о разорении игрока)

   Казино. У нас есть 10$. Хотим 20. Если поставить все 10, то с вероятностью $p = \frac{18}{38}$. Если ставить по 1$, то 20 мы получим раньше, чем 0 с вероятностью 0.11.

   $p = 0.45$ – вероятность выиграть партии, матч из $2n$ партий. Ничья в пользу казино. Мы можем выбрать n. Какое оптимально? На самом деле нужно побольше партий, чтобы убрать влияние ничьих. Со временем p начнёт перевешивать. Для данного p оптимальное $n = 5$.

5. Есть три кубика с числами от 1 до 18. Мы выбираем кубик. Крупье выбирает кубик. Выигрывает тот, у кого выпало больше. Игра эквивалентна вероятностному камень-ножницы-бумага. Крупье, выбирая кубик вторым, нам вредит.

   $I: 18, 10, 9, 8, 7, 5$

   $II: 17, 16, 15, 4, 3, 2$

   $III: 14, 13, 12, 11, 6, 1$

   $P(I > II) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12} = P(II > III) = P(III > I)$

   Теперь у нас похожая задача. Смотрим на вероятности по кругу при наличии n случайных величин:

   $\max_{\vec{X}} \min(P(X_1 > X_2), \ldots, P(X_n > X_1)) = \frac{n-1}{n}, \to \frac{3}{4}$

   $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $p_4 = \frac{2}{3} \ldots, \to \frac{3}{4}$