Свободная группа, задание образующими и соотношениями, абелевы группы

Я несколько удивлён тем, что в ближайший понедельник пар не будет. Таким образом мы не успеваем до коллоквиума разобрать задачи про абелевы группы. Поэтому в это ДЗ включены простые задачи про абелевы группы, чтобы у вас была возможность потренироваться их решать. Дэдлайн их сдачи — следующая пара после того, как мы начнём обсуждать эту тему. Задачи по теме "Образующие и соотношения"сдаются к следующей паре.

Теперь обсудим, что происходило на паре. Прежде всего речь шла о том, как описать все гомоморфизмы из некоторой фиксированной группы H в произвольную группу G. Оказалось, что для этого неплохо бы найти элементы порождающие H, потому что их образы при гомоморфизме позволяют установить образ любого другого элемента, так как он через них выражается. И все-все соотношения между порождающими. Ну или не все-все, а лишь те, из которых все остальные следуют.

Мы проинтерпретировали эту ситуацию следующим образом. Есть группа, которая порождена образующими $x_1, \ldots, x_n$, между которыми "нет соотношений". Эту группу мы назвали свободной, и обозначили $F(\{x_1, \ldots, x_n\})$ или просто F_n (в общем случае, если есть множество образующих X, то свободная группа с этим множеством образующих обозначается $F(X)$). Условие быть свободной от соотношений мы записали на языке гомоморфизмов, а именно должна иметь место биекция:

$$\{f : F_n \to G \mid f \text{ гомоморфизм}\} \cong G^n,$$

устроенная следующим образом

$$f \to (f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

Это самое естественное условие свободности, потому что мы знаем, что если на $x_1, \ldots, x_n$ наложены какие-то соотношения, то это препятствовало бы существованию гомоморфизмов с заданными значениями на образующих.

Свободная группа была построена нами, как множество слов в алфавите $\{x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}\}$ с точностью до сокращений. Мы обсудили, что для любого слова есть единственное несократимое слово, ему эквивалентное, поэтому думать можно только про несократимые слова.

Проверить определение свободности оказалось несложно — гомоморфизм строился так: надо в слово w подставить вместо $x_1, \ldots, x_n$ соотвествующие элементы группы G и посчитать, что получилось.

Пусть слова $w_1, \ldots, w_k$ какие-то слова (надо понимать, что их может быть и бесконечно много). Рассмотрим наименьшую нормальную подгруппу ими порождённую (то есть наименьшую нормальную подгруппу, содержащую данные слова). Эту подгруппу даже можно ”описать” — она состоит из различных произведений элементов, сопряжённых с $w_1, \ldots, w_k$. Обозначим фактор F_n по этой подгруппе за

$$\langle x_1, \ldots, x_n \mid w_1, \ldots, w_k\rangle \text{ или } \langle x_1, \ldots, x_n \mid w_1 =, \ldots, = w_k = 1\rangle$$

или ещё как-нибудь в таком духе. Теперь мы поймём, что любая группа изоморфна какой-то такой...

Действительно, если у группы H есть образующие $h_1, \ldots, h_n$, то H изоморфна фактору F_n. Надо просто x_i отправить в h_i. Образ соответствующего гомоморфизма — всё H по определению того, что такое порождающие. Дальше надо вспомнить теорему о гомоморфизме (образ изоморфен фактору по ядру).

Что же такое на этом языке соотношения между образующими? Это элементы ядра построенного гомоморфизма $p : F_n \to H$, то есть слова, которые, будучи вычисленными в H, становятся единицей. Теперь, если взять те из них, которые порождают ядро p, как нормальную подгруппу (например вообще все элементы ядра, их правда бесконечно много), то получится искомое представление.

Сформулируем общий факт про гомоморфизмы

Факт. Пусть есть гомоморфизм $f\colon G \to G'$. Пусть H нормальная подгруппа в G, содержащаяся в ядре f, а π - это каноническая проекция $G \to G/H$. Тогда существует единственное отображение $\overline{f}\colon G/H \to G'$, что $f = \overline{f} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & G' \\
G/H \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Это можно понимать так. Образ — это фактор по ядру. Но факторизовать можно в два этапа — сначала по подгруппе H, которая меньше, а потом по всему тому, что осталось от ядра. Если вам этот факт не очевиден — разберитесь.

Как понять на практике каких соотношений достаточно? Вычислять ядро руками довольно глупая затея. Удобно действовать следующим образом. Сначала найти какие-то соотношения $w_1, \ldots, w_k$, которые выполнены для $h_1, \ldots, h_n$

в H и про которые хочется верить, что они порождающие. Затем посмотреть на группу $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w_1, \ldots, w_k \rangle$. Про её элементы надо думать, как про слова, в которых $w_1, \ldots, w_k$ можно вставлять и убирать, где и когда захочется (потому что вставляя и убирая вы не выходите за пределы того же смежного класса, а ещё надо про слова $x_i x_i^{-1}$ не забывать).

Самый простой способ показать, что $w_1, \ldots, w_k$ задают все соотношения — это показать что в этой группе $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w_1, \ldots$ элементов меньше, чем в H. Действительно, из группы $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w_1, \ldots, w_k \rangle$ есть сюръективный гомоморфизм в H (см. Факт). Если число элементов в $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w_1, \ldots, w_k \rangle$ не превосходит $|H|$, то это отображение инъективно и, следовательно, изоморфизм.

Реализовать такую стратегию вполне реально. А именно надо выбрать некий набор слов, которых меньше, чем элементов в H, и показать, что используя соотношения $w_1, \ldots, w_k$, можно любое слово преобразовать в одно из набора. Если элементов H бесконечно много, то просто подсчётом порядка не обойтись. Надо построить набор слов к которым всё сводится, так, чтобы было видно, что для каждого элемента из $|H|$, есть единственное слово из набора, которое его представляет.

Если с первого тыка подобрать нужные соотношения не получилось, то стоит поискать ещё соотношений. Если не видно, к словам какой формы надо всё сводить, то стоит написать, как все элементы группы выражаются через образующие — к этим словам все и должно свестись.

Заметно сложнее задача, когда вам дана группа в таком виде:

$$\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w_1, \ldots, w_k \rangle,$$

и надо найти, например, её порядок. Самый простой вариант — найти конкретную группу, у которой нужное число порождающих и выполнены все соотношения и, используя описанные выше соображения, показать, что эта конкретная группа изоморфна $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w_1, \ldots, w_k \rangle$.

Если придумать не получается, то стоит как и раньше придумать набор каких-то стандартных слов, к которым всё сводится, а после этого доказывать, что какие бы преобразования используя $w_1, \ldots, w_k$ мы не производили, то одно стандартное слово в другое не переведётся. Это примерно такие же рассуждения, как были про несократимые слова в свободной группе, только, чаще, сложнее. Вообще это алгоритмически не разрешимая задача...

Что же до гомоморфизмов, то верно следующее описание. Пусть $H = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w_1, \ldots, w_k \rangle$, тогда все гомоморфизмы из H в группу G задаются элементами $g_1, \ldots, g_n \in G$, для которых выполнены соотношения $w_1, \ldots, w_k$ (зто следует из факта и определения свободной группы).
Напоследок напомню, что мы установили

Факт. Следующие группы задаются образующими и соотношениями
а) $S_3 \cong \langle a, b \,|\, a^2 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle$.
б) $\mathbb{Z} \cong \langle a \,|\, \rangle$.
в) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle a, b \,|\, aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$.
г) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle a \,|\, a^n = 1 \rangle$.

Задания по теме "Образующие и соотношения"

Задание 1. Покажите, что группа, заданная образующими и соотношениями $G = \langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = 1 \rangle$ бесконечна. Как выглядят её элементы.

Задание 2. Покажите, что $S_3 \cong \langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$.

Задание 3. Посчитайте количество элементов в группе $\langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = (ab)^7 = 1 \rangle$.

Задание 4. Покажите, что следующие группы тривиальны:
а) $\langle a, b \,|\, a^4 = b^2 = 1 \ \ ab^2 = b^3 a \ \ ba^3 = a^2 b \rangle$.
б) $\langle a, b \,|\, a^5 = b^3 = 1 \ \ ab^2 = ba \ \ ba = a^2 b \rangle$.
Вспомните про сопряжение...

Задание 5. Покажите, что в свободной группе F_n не бывает элементов конечного порядка кроме единичного.

Иногда думать про образующие и соотношения может помочь, если вы ищете порядок какой-то группы (получается оценка сверху).

Задание 6. Например, пусть G подгруппа в S_7 заданная образующими $(27)(36)(45)$, $(13)(74)(65)$. Задайте её образующими и соотношениями и найдите порядок.

Задание 7. Пусть $G = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w_1 = \cdots = w_k = 1 \rangle$ и $H = \langle y_1, \ldots, y_m \,|\, v_1 = \cdots = s_l = 1 \rangle$. Как задать образующими $G \times H$?

Задания по теме "Абелевы группы"

Факт. Все конечные абелевы группы построены с помощью операции прямой суммы (то же самое, что прямое произведение) из кирпичиков вида $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, где p — простое. Если группа представлена двумя разными способами в виде прямой суммы таких, то количество слагаемых и и их тип одинаковы.

Разложение абелевой группы в прямую сумму — это тоже самое, что задать набор подгрупп, так что одна не пересекается (то есть только по нулю) с суммой остальных. Прежде всего надо понимать, что конечная абелева группа может быть разложена в прямую сумму разными способами. Проиллюстрируем это задачей.

Задание 8. Пусть p простое число. Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p^2$.
а) Какой порядок имеет элемент $(1, 1)$?
б) Сколько элементов порядка p, p^2, p^3 в этой группе?
в) Покажите, что подгруппы $\langle(1, 0)\rangle$ и $\langle(1, 1)\rangle$ не пересекаются и задают разложение группы в прямую сумму. Безусловно эти слагаемые изоморфны исходным, но как подгруппы они реализованы по другому.
г) Сколько существует пар подгрупп в G порядка p и p^2, которые не пересекаются и порождают всю группу? (Сколькими способами G раскладывается в прямую сумму).

Оцените контраст.

Задание 9. Сколько подгрупп в группе $\mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/q$, где p и q различные простые?

Кроме конечно порождённых абелевых групп бывают и бесконечно порождённые.

Задание 10. Покажите, что $\mathbb{Q}$ относительно сложения не может быть порождена конечным числом элементов. А какими она порождается?

Задание 11. Разложите в прямую суммы примарных циклических следующую группу: $(\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/27)/\langle(6, 9)\rangle$.