Домашнее задание 2. Производящие функции и рекуррентные соотношения.

Задач на зачёт: 5 из 8 (пункты считаются отдельными задачами)

1. Числами Люка (Lucas numbers) называются числа L_n, удовлетворяющие следующему рекуррентному соотношению:
$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \ \ n \geq 0; \qquad L_0 = 2, \ \ L_1 = 1.$$
Постройте для них производящую функцию и найдите явное выражение для L_n.

2. Обобщением чисел Фибоначчи F_n и чисел Люка L_n являются так называемые последовательности Люка $U_n(p,q)$ и $V_n(p,q)$, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:
$$U_{n+2} = p\,U_{n+1} - q\,U_n, \ \ n \geq 0; \qquad V_{n+2} = p\,V_{n+1} - q\,V_n, \ \ n \geq 0;$$
$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1; \qquad V_0 = 2, \quad V_1 = p.$$
Постройте производящие функции для этих чисел.

3. Решите с помощью обыкновенных производящих функций следующее линейное рекуррентное соотношение:
$$a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 1, \ a_1 = a_2 = 0.$$

4. Составьте рекуррентное соотношение для количества a_n слов длины n над алфавитом $\{0,1,2\}$, не содержащих двух идущих подряд нулей. Решите это рекуррентное соотношение с помощью обыкновенных производящих функций.

5. Составьте рекуррентное соотношение для количества a_n способов замостить доску размером $3 \times n$ костяшками домино. Решить это рекуррентное соотношение с помощью обыкновенных производящих функций.

6. Решите с помощью экспоненциальных производящих функций следующие линейые рекуррентные соотношения:
$$a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n, \qquad a_0 = a_1 = 1,$$
$$a_n = na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2}, \qquad a_0 = a_1 = 1.$$