13 Домашнее задание

13.1 (1 балл). Установить биекцию множества плоских бинарных корневых деревьев, построенных на n вершинах, с правильными скобочными последовательностями длины $2n$, доказав, тем самым, что количество таких деревьев равно числу Каталана C_n.

13.2 (1 балл). Доказать, что количество *полных* плоских корневых бинарных деревьев (т.е. деревьев, у которых любая вершина имеет либо ровно двух потомков, либо ни одного) с $(n+$ $+1)$-м листом равно числу Каталана C_n.

13.3 (1 балл). Рассмотрим выражение вида

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}, \tag{1}$$

где элементы a_i принадлежат множеству S с введенной на нем неассоциативной бинарной операцией $' \cdot '$. Очевидно, что это выражение не имеет смысла до тех пор, пока мы не расставим скобки так, чтобы указать на последовательность проводимых операций. Доказать, что количество расстановок скобок в выражениях вида (1) описывается числами Каталана C_n.

13.4 (1 балл). Установить биекцию между всеми триангуляциями выпуклого $(n+2)$-угольника и плоскими корневыми бинарными деревьями, построенными на n вершинах. Изобразить эту биекцию на рисунке для одной из конкретных триангуляций выпуклого шестиугольника.

13.5 (1 балл). Разбиение π множества $[n]$ на блоки $\beta_1, \ldots, \beta_k$ называется непересекающимся, если не существует никакой четверки линейно упорядоченных чисел

$$1 \leqslant a < b < c < d \leqslant n,$$

такой, что $a, c \in \beta_i$, а $b, d \in \beta_j$ для некоторых блоков β_i и β_j разбиения π. Выписать все непересекающиеся разбиения множества [3]. Доказать, что количество таких разбиений описывается числами Каталана C_n.

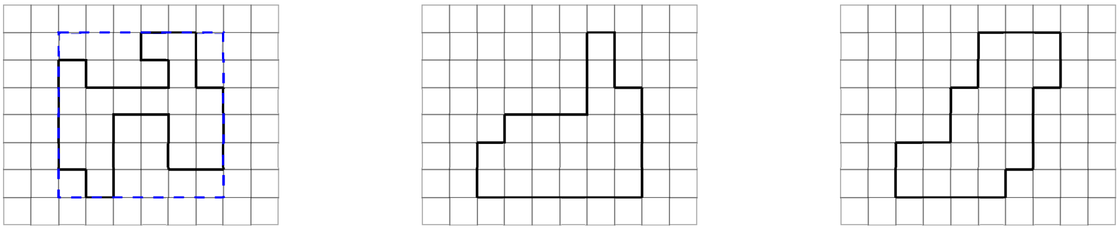
13.6 (1 балл). Доказать, что множество NC_n всех непересекающихся разбиений множества $[n]$, упорядоченное по измельчению, является частично упорядоченным множеством. Показать, что это множество является решеткой.

13.7 (2 балла). Доказать, что для любого положительного натурального n функция Мебиуса μ решетки NC_n рассчитывается по формуле

$$\mu(\widehat{0}, \widehat{1}) = (-1)^{n-1} \cdot C_{n-1},$$

где C_n — числа Каталана.

13.8 (2 балла). Полимино называется область на клетчатой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, идущей по сторонам клеток (см.рис.1,a). Мы будем рассматривать так называемые выпуклые полимино, то есть полимино, периметр которого совпадает с периметром его минимального ограничивающего прямоугольника, то есть прямоугольника минимального периметра, содержащего полимино внутри себя (см. синюю пунктирную линию на рис.1). Так, полимино, показанный на рис.1,a, выпуклым не является. На рис..1,b показан выпуклый полимино.



(a) (b) (c)

Рис. 1

Полимино называется ориентированным выпуклым полимино, если он содержит по меньшей мере один из углов своего минимального ограничивающего прямоугольника. Если он содержит оба нижних угла своего минимального ограничивающего прямоугольтика, то полимино называется стековым (см.рис.1,b). Доказать, что количество стековых полимино с периметром $2n+2$ равно числу Фибоначчи F_{2n-2}. Нарисовать все пять стековых полимино с периодом восемь $(n = 3)$.

13.9 (2 балла)**.** Полимино называется параллелограммным, если его граница представляет собой объединение двух ломаных, идущих вправо и/или вверх из общего левого нижнего конца в общий правый верхний конец (см.рис.1,c). Доказать, что количество параллелограммных полимино с периметром $2n + 2$ равно числу Каталана C_n. Нарисовать все пять параллелограммных полимино периметра восемь.